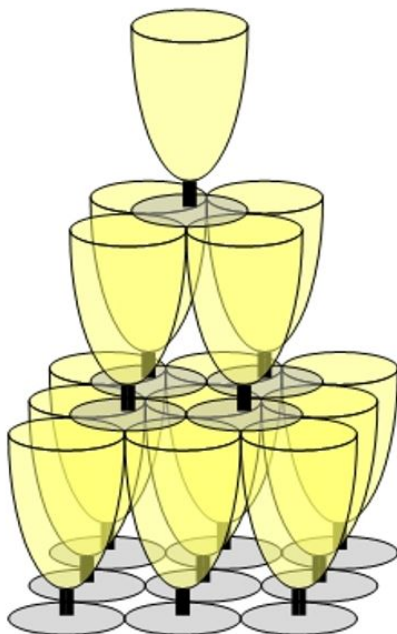


## Lösungen zu der Musteraufgabe des Flyers

## Mathematik- und Logikspiele 2025

Roger Burkhardt

22. September 2024

**Der ungeschickte Sommelier**

Ein Sommelier bereitet einen Champagnerbrunnen vor. Er stellt 25 Gläser im Quadrat auf, dann stellt er 16 Gläser im Quadrat darüber, dann 9, dann 4, dann 1, um eine fünfstöckige Pyramide zu erhalten (im Bild sind nur die obersten 3 Ebenen dargestellt!).

Dann giesst er Champagner in das oberste Glas, bis alle Gläser der Pyramide gefüllt sind. Wenn ein Glas überläuft, fliesst der Überschuss gleichmässig in die vier darunter liegenden Gläser. Aber für die Gläser ganz unten, die überlaufen, wird der Überschuss verschwendet.

**Wie viel Champagner wird verschwendet worden sein, wenn alle Gläser ganz gefüllt sind?**

Gib die Antwort in Anzahl Gläser in Form einer ganzen Zahl oder eines nicht kürzbaren Bruchs an.

## 1 Der ungeschickte Sommelier

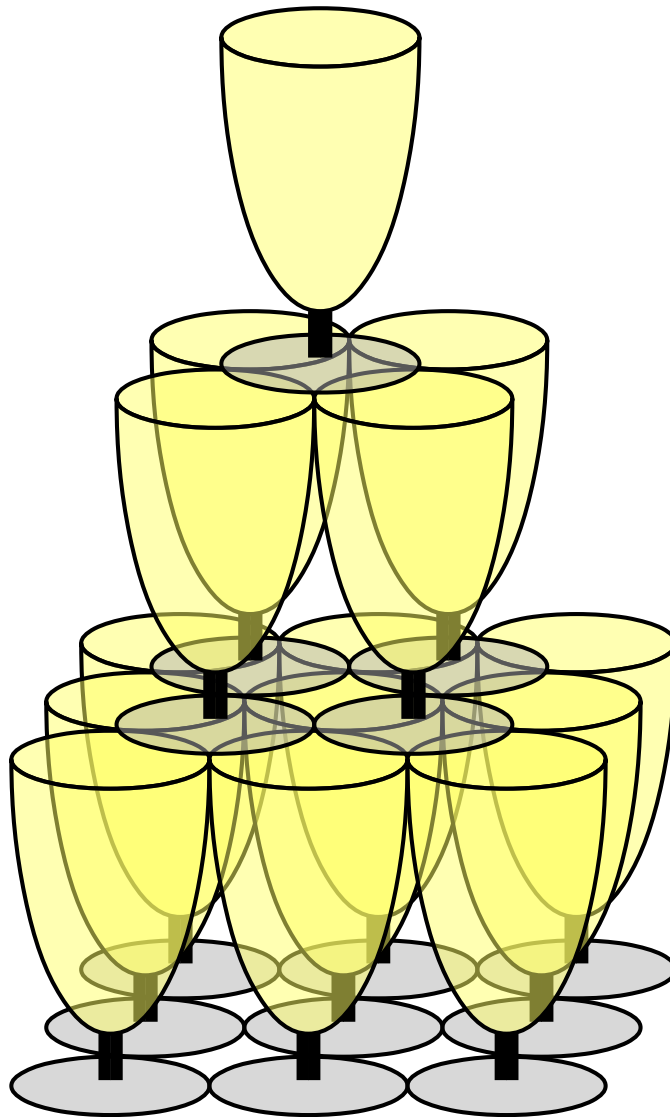
### 1.1 Aufgabe

Ein Sommelier bereitet einen Champagnerbrunnen vor. Er stellt 25 Gläser im Quadrat auf, dann stellt er 16 Gläser im Quadrat darüber, dann 9, dann 4, dann 1, um eine fünfstöckige Pyramide zu erhalten (im Bild sind nur die obersten 3 Ebenen dargestellt!).

Dann giesst er Champagner in das oberste Glas, bis alle Gläser der Pyramide gefüllt sind. Wenn ein Glas überläuft, fließt der Überschuss gleichmässig in die vier darunter liegenden Gläser. Aber für die Gläser ganz unten, die überlaufen, wird der Überschuss verschwendet.

**Wie viel Champagner wird verschwendet worden sein, wenn alle Gläser ganz gefüllt sind?**

Gib die Antwort in Anzahl Gläser in Form einer ganzen Zahl oder eines nicht kürzbaren Bruchs an.



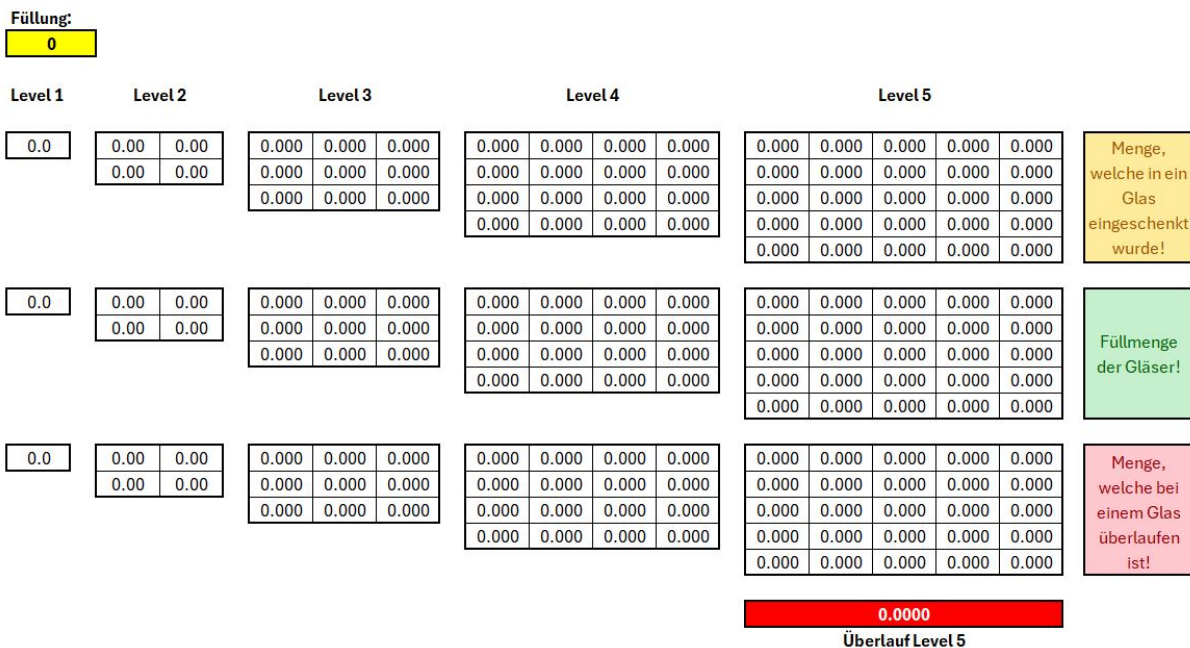
## 1.2 Füllprozess

Die Lösung der Aufgabe lässt sich einfach berechnen: Die Summe der ersten fünf Potenzen zur Basis 4 (beginnend mit dem Exponenten 0) minus die Summe der ersten fünf Quadratzahlen:

$$n_{\text{Überlauf}} = (4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 286$$

Um die obige Formel zu verstehen, muss man sich den Ablauf der Füllung gut überlegen (und sich schlussendlich die richtigen Fragen stellen). Um den Ablauf der Füllung (und die daraus entstehenden verschiedenen Problematiken) zu verstehen, habe ich eine kleine Animation erstellt. Dabei habe ich die Gläser in den fünf Stufen der Pyramide drei mal gezeichnet:

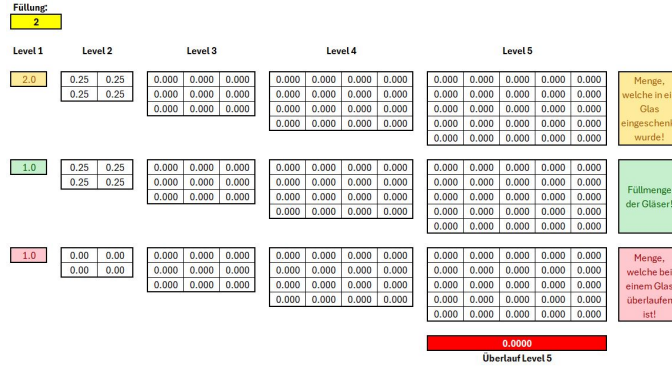
- Im oberen Teil ist zu sehen, welche Menge (in Anzahl Gläsern) in ein Glas geflossen ist. Ist die Menge kleiner 1, ist das Glas noch nicht voll, ab einer Füllung von 1 ist das Glas voll und der überschüssige Teil fließt in die vier Gläser darunter.
- Im mittleren Teil ist dargestellt, welche Füllung die einzelnen Gläser haben (einen Wert von 0 bis 1). Ist die Füllmenge gleich 1, ist das Glas voll und die Zelle wird in der Animation grün eingefärbt.
- Im unteren Teil der Animation sieht man, welche Menge aus einem Glas schon übergelaufen ist.



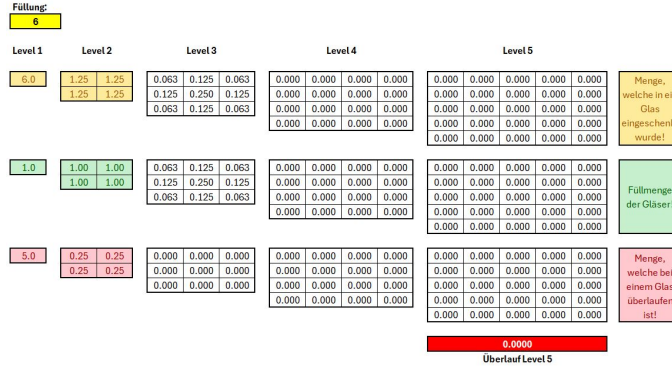
Hier einige Bilder, welche den Füllprozess demonstrieren sollen:

- Am Anfang ist alles noch sehr übersichtlich - nach dem das erste Glas eingeschenkt wurde, ist die oberste Ebene gefüllt.

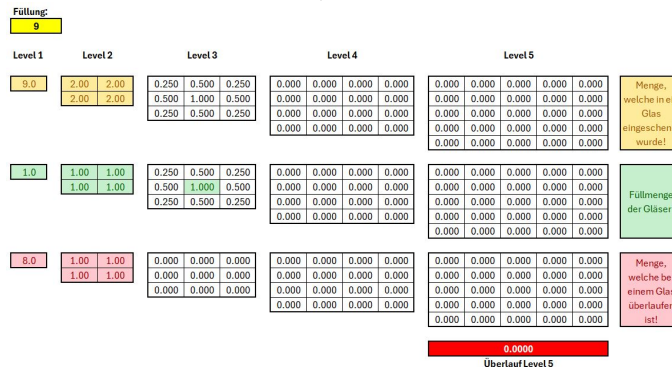
- Wird ein zweites Glas oben eingegossen, überläuft das oberste Glas und die Füllung wird gleichmässig auf die vier Gläser darunter verteilt (sind somit zu einem Viertel gefüllt). Analog verhält es sich bei den nächsten drei Gläsern die oben eingegossen werden - nach 5 Füllungen sind dann auch die Gläser der zweiten Ebene alle gefüllt.



- Ab der sechsten Füllung überlaufen nun auch die Gläser der zweiten Ebene. Dabei bekommt jedes Glas der zweiten Ebene einen Viertel hinzu, welches gleichmässig in die vier Gläser darunter überläuft (ein Viertel von einer Viertelfüllung - also ein Sechszehntel). Da nun aber die Gläser auf der dritten Ebene von einem (die vier Gläser in der Ecke), von zwei (die vier mittleren Gläser auf den Kanten) bzw. von vier Gläsern (Glas im Zentrum) einen Anteil erhalten, sind die Gläser unterschiedlich gefüllt ( $1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$  Füllung an den Ecken,  $2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$  Füllung in der Mitte der Kanten und  $4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$  Füllung im Zentrum).



- Die Gläser der dritten Ebene füllen sich also unterschiedlich schnell. Nach der 9-ten Füllung ist das Glas im Zentrum gefüllt, nach der 13-ten Füllung die vier Gläser in der Mitte auf den Kanten und nach der 21-ten Füllung die vier Gläser an den Ecken. Dabei sind einige Gläser der dritten Ebene schon länger am Überlaufen und haben die verschiedenen Gläser der vierten (und auch der untersten Ebene) angefangen zu befüllen.



**Füllung: 21**

Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	
21.0	5.00 5.00 5.00 5.00	1.000 2.000 1.000 2.000 4.000 2.000 1.000 2.000 1.000	0.250 0.250 0.250 0.250 0.250 1.250 1.250 0.250 0.250 0.250 1.250 0.250 0.000 0.250 0.250 0.000	0.000 0.063 0.125 0.063 0.000 0.000 0.125 0.250 0.125 0.000 0.000 0.063 0.125 0.063 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	Menge, welche in ein Glas eingegossen wurde!
1.0	1.00 1.00 1.00 1.00	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	0.000 0.250 0.250 0.000 0.250 1.000 1.000 0.250 0.250 1.000 1.000 0.250 0.000 0.250 0.250 0.000	0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.063 0.125 0.063 0.000 0.000 0.125 0.250 0.125 0.000 0.000 0.063 0.125 0.063 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	Füllmenge der Gläser!
20.0	4.00 4.00 4.00 4.00	0.000 1.000 0.000 1.000 3.000 1.000 0.000 1.000 0.000	0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.250 0.250 0.000 0.000 0.250 0.250 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	0.000 0.000	Menge, welche bei einem Glas überlaufen ist!
<b>0.0000</b> Überlauf Level 5					

- Mit der 27-igsten Füllung wird das Glas im Zentrum der untersten Ebene voll und beginnt zu überlaufen ( $\frac{3}{32}$ ). Ab nun wird Champagner verschüttet. Nun könnte man die bei den weiteren Füllungen entstehenden Überläufe aufsummieren und so die Aufgabe lösen!

**Füllung: 27**

Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	
27.0	6.50 6.50 6.50 6.50	1.375 2.750 1.375 2.750 5.500 2.750 1.375 2.750 1.375	0.094 0.531 0.531 0.094 0.531 2.094 2.094 0.531 0.531 2.094 2.094 0.531 0.094 0.531 0.531 0.094	0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.273 0.547 0.273 0.000 0.000 0.547 1.094 0.547 0.000 0.000 0.273 0.547 0.273 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	Menge, welche in ein Glas eingegossen wurde!
1.0	1.00 1.00 1.00 1.00	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	0.094 0.531 0.531 0.094 0.531 1.000 1.000 0.531 0.531 1.000 1.000 0.531 0.094 0.531 0.531 0.094	0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.273 0.547 0.273 0.000 0.000 0.547 1.000 0.547 0.000 0.000 0.273 0.547 0.273 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	Füllmenge der Gläser!
26.0	5.50 5.50 5.50 5.50	0.375 1.750 0.375 1.750 4.500 1.750 0.375 1.750 0.375	0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 1.094 1.094 0.000 0.000 1.094 1.094 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000	0.000 0.000	Menge, welche bei einem Glas überlaufen ist!
<b>0.0938</b> Überlauf Level 5					

- Nach der 85-igsten Füllung sind dann auch alle Gläser der vierten Ebene gefüllt. Dabei sind aber auch schon viele Gläser der fünften Ebene voll und es wird ein immer größerer Anteil verschüttet.

**Füllung: 85**

Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	
85.0	21.00 21.00 21.00 21.00	5.000 10.000 5.000 10.000 20.000 10.000 5.000 10.000 5.000	1.000 3.250 3.250 1.000 3.250 10.250 10.250 3.250 3.250 10.250 10.250 3.250 1.000 3.250 3.250 1.000	0.000 0.563 1.125 0.563 0.000 0.563 3.438 5.750 3.438 0.563 1.125 5.750 9.250 5.750 1.125 0.563 3.438 5.750 3.438 0.563 0.000 0.563 1.125 0.563 0.000	Menge, welche in ein Glas eingegossen wurde!
1.0	1.00 1.00 1.00 1.00	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	0.000 0.563 1.000 0.563 0.000 0.563 1.000 1.000 1.000 0.563 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 0.563 1.000 1.000 1.000 0.563 0.000 0.563 1.000 0.563 0.000	Füllmenge der Gläser!
84.0	20.00 20.00 20.00 20.00	4.000 9.000 4.000 9.000 19.000 9.000 4.000 9.000 4.000	0.000 2.250 2.250 0.000 2.250 9.250 9.250 2.250 2.250 9.250 9.250 2.250 0.000 2.250 2.250 0.000	0.000 0.000 0.125 0.000 0.000 0.000 2.438 4.750 2.438 0.000 0.125 4.750 8.250 4.750 0.125 0.000 2.438 4.750 2.438 0.000 0.000 0.000 0.125 0.000 0.000	Menge, welche bei einem Glas überlaufen ist!
<b>37.5000</b> Überlauf Level 5					

- Nun dauert es ziemlich lange, bis auch die restlichen Gläser der untersten Ebene alle voll sind (nach der 341-igsten Füllung!)

**Füllung: 340**

Level 1	Level 2	Level 3	Level 4	Level 5	
340.0	84.75 84.75 84.75 84.75	20.938 41.875 20.938 41.875 83.750 41.875 20.938 41.875 20.938	4.984 15.203 15.203 4.984 15.203 45.109 45.109 15.203 15.203 45.109 45.109 15.203 4.984 15.203 15.203 4.984	0.996 4.547 7.102 4.547 0.996 4.547 19.375 29.656 19.375 4.547 7.102 29.656 45.109 29.656 7.102 4.547 19.375 29.656 19.375 4.547 0.996 4.547 7.102 4.547 0.996	Menge, welche in ein Glas eingegossen wurde!
1.0	1.00 1.00 1.00 1.00	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000	0.996 1.000 1.000 1.000 0.996 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 1.000 0.996 1.000 1.000 1.000 0.996	Füllmenge der Gläser!
339.0	83.75 83.75 83.75 83.75	19.938 40.875 19.938 40.875 82.750 40.875 19.938 40.875 19.938	3.984 14.203 14.203 3.984 14.203 45.109 45.109 14.203 14.203 45.109 45.109 14.203 3.984 14.203 14.203 3.984	0.000 3.547 6.102 3.547 0.000 3.547 18.375 28.656 18.375 3.547 6.102 28.656 44.109 28.656 6.102 3.547 18.375 28.656 18.375 3.547 0.000 3.547 6.102 3.547 0.000	Menge, welche bei einem Glas überlaufen ist!
<b>285.0156</b> Überlauf Level 5					

Die Beschreibung der überlaufenden Menge ist also recht kompliziert und die Beantwortung der Frage auf einem direkten Weg ist nicht einfach zu bestimmen!

### 1.3 Lösung

Um das hier gestellte Problem zu Lösen, ist es am einfachsten einen kleinen Umweg zu gehen. Wir stellen uns zuerst die Frage, nach wie vielen Füllungen eine bestimmte Ebene vollständig gefüllt ist (und lassen die Menge an Überlauf einmal ausser Acht). Für die oberste Ebene braucht es eine Füllung. Um auch die zweite Ebene zu füllen, braucht es  $4 = 4^1$  weitere Füllungen (die vier Gläser der zweiten Ebene bekommen jeweils  $\frac{1}{4}$  der Füllung). Bei der dritten Ebene füllen sich die Gläser unterschiedlich schnell. Dabei brauchen die vier Gläser an den Ecken am längsten. Die vier Gläser an den Ecken werden jeweils nur von einem Glas gespeist und erhalten somit pro Füllung nur noch  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$  der oben eingeschenkten Menge. Somit sind zu den  $1 + 4 = 5$  Füllungen für die zweite Ebene  $16 = 4^2$  weitere Füllungen für die dritte Ebene nötig. Nun konzentrieren wir uns auf die Eckgläser der vierten Ebene. Bei den ersten  $1 + 4 + 16 = 21$  Füllungen erhalten diese noch keinen Überlauf von oben. Ab der 22-igsten Füllung überfließt nun jeweils  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$  in eines dieser Eckgläser und es braucht somit  $64 = 4^3$  weitere Füllungen, um diese zu füllen. Analog verhält es sich mit der untersten Ebene - es braucht  $4^4 = 256$  weitere Füllungen um die Eckgläser zu füllen. Gesamthaft sind somit 341 Füllungen notwendig:

$$n_{\text{Füllungen}} = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 341$$

Da nun alle Gläser ( $n_{\text{Gläser}} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ ) gefüllt sind, können wir den gesamten Überlauf aus der Differenz der vorgenommenen Füllungen und den dadurch gefüllten Gläser berechnen:

$$\begin{aligned} n_{\text{Überlauf}} &= n_{\text{Füllungen}} - n_{\text{Gläser}} \\ &= \left(4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4\right) - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\right) \\ &= 341 - 55 = 286 \end{aligned}$$