Christian Rüede

Strukturierungen von Termen und Gleichungen

Eine empirische und theoretische Studie über den Gebrauch von algebraischen Zeichen durch Novizen und Experten aus semiotisch-pragmatischer Sicht

Habilitationsschrift

Eingereicht an der Fakultät für
Mathematik, Naturwissenschaft und Technik
der Pädagogischen Hochschule Freiburg
2013

Eingereicht am 5. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird die Forschungsfrage motiviert, formuliert und eingebettet. Insbesondere wird die vorgelegte Arbeit in der mathematikdidaktischen Diskussion verortet.

1.1 Problemstellung und Überblick

In diesem Abschnitt wird der Rahmen der Arbeit umrissen. Es wird die Forschungsfrage formuliert, der Aufbau erklärt und der mathematische Gegenstand, worauf die Arbeit fokussiert, definiert.

1.1.1 Ziel der Arbeit

Ende der Sekundarstufe 1 und in der Sekundarstufe 2 spielt der formale algebraische Kalkül eine immer wichtigere Rolle. Terme werden vereinfacht und Gleichungen werden gelöst, indem die entsprechenden Ausdrücke gemäß den algebraischen Regeln umgeformt werden. Wichtig werden Verfahren, Normalformen von Gleichungen, Lösungsformeln und mathematische Gesetzmäßigkeiten in der Form von Regeln. Als Beispiel sei das Lösen einer Gleichung wie $6(3x-2) = 100-4(3x-17)$ oder $6(3x-2) = 100-4(3x-2)$ gegeben. Obwohl die beiden Gleichungen ähnlich aussehen, bieten sich unterschiedliche Umformungen an. Bei der ersten Gleichung ist das Standardverfahren zum Lösen von linearen Gleichungen erste Wahl: ausmultiplizieren, zusammenfassen und nach x auflösen. Bei der zweiten Gleichung lohnt es sich hingegen, statt die Klammern auszumultiplizieren, die Gleichung auf die Form $10(3x - 2) = 100$ zu bringen und dann auf beiden Seiten durch 10 zu dividieren. Offenbar hat allein der kleine Unterschied in der letzten Klammer, das eine Mal $(3x - 17)$, das andere Mal $(3x-2)$, eine große Wirkung: die eine Gleichung wird mit Vorteil anders als die andere umgeformt. Wie kommt eine Person darauf? Wie entdeckt sie – egal ob mathematisch versiert oder nicht – solch unterschiedliche Umformungen? Dies führt direkt zur Leitfrage der vorliegenden Arbeit: *Wie* erkennt eine Person Umformungen in algebraischen Ausdrücken?

Wesentlich bei dieser Leitfrage sind zwei Dinge: Erstens die Betonung des *Wie* und zweitens der *individuelle* Zugang zum Ausdruck. So geht diese Arbeit davon aus, dass algebraische Terme und Gleichungen an und für sich bedeutungslose Objekte in der Form von Zeichenreihen sind. Bedeutung wird ihnen durch eine Person zugewiesen. Die Person ist es, die einen Ausdruck *strukturiert.* Dies drückt sich darin aus, wie die Person die Zeichen im Ausdruck behandelt, damit er Sinn für sie macht, das heißt, damit sie in ihm Umformungen erkennt. Die Person muss also den Ausdruck „lesen". Und es ist dieser Akt des Lesens, der erstens der Art und Weise, wie sie Umformungen erkennt, entspricht, und zweitens ihrem individuellen Zugang zum Ausdruck. Vorstellbar wäre etwa eine Person, die die Faustregel „Punkt vor Strich" temporal begreift, quasi als Befehl, immer zuerst zu multiplizieren und zu dividieren und erst dann zu addieren und zu subtrahieren. Eine solche Person würde beim Lösen obiger Gleichung $6(3x-2) = 100 - 4(3x-2)$ vorwiegend auf den einen oder anderen Klammerterm fokussieren. Angenommen, sie macht sich zuerst an die linke Seite. Dann bezieht sie 6 multiplikativ auf die $3x$, behandelt also $6(3x...)$ als zuerst auszuführende Multiplikation. Die rechte Seite der Gleichung wäre vorerst unwichtig. Vermutlich würde die Person nicht mal die Gleichheit der Klammern erkennen. Auf keinen Fall würde sie die beiden Klammerterme aufeinander beziehen, um die Gleichung auf $10(3x-2) = 100$ zu vereinfachen. Denn sie geht ja davon aus, dass zuerst ausmultipliziert werden *muss*, bevor addiert oder subtrahiert werden kann.

Das wäre ein Beispiel dafür, *wie* das Ausmultiplizieren erkannt werden kann. Es beschreibt Tätigkeiten der Person, die schließlich zur Umformung führen. Eine andere Person würde vielleicht die Regel „Punkt vor Strich" nicht temporal begreifen, sondern als Konvention darüber, wie die einzelnen Zeichen zu gruppieren sind. Diese Person würde vermutlich die Gleichung zuerst in links und rechts einteilen und insgesamt drei Teile bilden: $6(3x-2)$, 100 und $4(3x-2)$. In einem ersten Schritt wären die Bezüge zwischen diesen Teilen wichtig, etwa, dass rechts eine Differenz steht oder dass $6(3x-2)$ sowohl als Summand als auch als Multiplikation behandelt werden kann. Erst in einem zweiten Schritt würden die Teile näher betrachtet, durch Vergleich beider Seiten die Gleichheit der Klammern erkannt und als Konsequenz das Verschieben von $4(3x-2)$ auf die linke Seite antizipiert. Dieser Ablauf illustriert exemplarisch, *wie* eine Person auf den Zwischenschritt $10(3x-2) = 100$ geführt wird. Genau solche individuellen Prozesse des Strukturierens, die zeigen, *wie* Personen die Teile algebraischer Ausdrücke aufeinander beziehen und so auf Umformungen geführt werden, sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Warum ist eine Untersuchung zum individuellen Strukturieren algebraischer Ausdrücke relevant? Der Grund liegt in der Schwierigkeit der Schülerinnen und Schüler beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen. Die Aufgabe, die Gleichung $6(3x-2) = 100 - 4(3x-2)$ möglichst einfach zu lösen, ist ungleich schwieriger als die Aufgabe, auf beiden Seiten der Gleichung $6(3x-2) = 100-4(3x-2)$ den Ausdruck $4(3x-2)$ zu addieren. Zu erkennen, wie umgeformt werden soll, bereitet manchmal mehr Mühe als das Ausführen einer (gegebenen) Umformung. Und der Prozess des Strukturierens beschreibt gerade den Prozess des Erkennens von Umformungsoptionen. Worauf achtet die Person? Was fällt ihr auf? Welche Teile verbindet sie miteinander? Wie verbindet sie diese? Erkennt sie Eigenschaften von Zahlen, Anwendungssituationen von Rechengesetzen? Welche Verfahren aktiviert sie? Wie behandelt sie diese? Antworten auf solche Fragen führen zur Beschreibung davon, wie eine Person eine Umformung erkannte. Indem Denkwege von angemessenen, unangemessenen oder gar fehlerhaften Umformungen rekonstruiert werden, gewinnt die Mathematikdidaktik Einsichten in die entsprechenden Sichtweisen auf algebraische Ausdrücke. Als Folge können passende Interventionen generiert werden. Sind beispielsweise die Denkwege gewinnbringender Umformungen rekonstruiert, besitzt die Mathematikdidaktik gelungene Beispiele, die prototypisch gerade für solche Interventionen genutzt werden können.

Die hier vorgestellte Untersuchung fokussiert also auf das individuelle Strukturieren und somit darauf, wie Schülerinnen, Schüler, Lehrkräfte etc. tatsächlich Terme und Gleichungen strukturieren. Ziel ist die Beschreibung dieses Prozesses des individuellen Strukturierens sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Perspektive. Entsprechend sind die folgenden vier Forschungsfragen leitend.

1. Wie lässt sich der Prozess des individuellen Strukturierens eines algebraischen Ausdrucks und dessen Produkt – die individuell hergestellte Struktur – begrifflich bestimmen und theoretisch fundieren?

2. Mit welchen Methoden können solche Prozesse des Strukturierens empirisch erfasst werden?

3. Wie strukturiert jemand einen zu vereinfachenden Term und eine zu lösende Gleichung? Bieten sich Kategorien von individuell hergestellten Strukturen an?

4. Wie entwickelt sich beim Individuum das Strukturieren algebraischer Ausdrücke?

Die ersten beiden Fragen sind präzise genug, um die theoretischen und methodologischen Betrachtungen leiten zu können. Erst nach diesen Überlegungen wird die dritte Frage präziser formuliert werden, um zwei empirische Studien gezielt planen zu können. Nach Vorliegen der empirischen Resultate wird dann ersichtlich sein, inwiefern die vierte Frage im Rahmen der vorgelegten Arbeit beantwortbar ist.

1.1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorgelegte Arbeit bildet den Forschungsprozess, der zu ihr führte, (in vereinfachter Form) ab. Insofern hat der vorliegende Text einen genetischen

Charakter, der sich auch in der Gliederung der Arbeit spiegelt. So werden die theoretischen Überlegungen in mehreren Schritten dargelegt. Eine erste Verortung findet schon im Kapitel 1 statt (Abschnitt 1.2). In Kapitel 2 wird die Theorie so weit entwickelt, dass empirische Studien geplant werden können. Zentral ist hierbei die Bestimmung und Fundierung der Begrifflichkeiten zur Beschreibung individueller Prozesse des Strukturierens. Das Kapitel 2 schließt mit der Darstellung eines Modells zur Auswertung von empirischen Daten über Strukturierungsprozesse (Abschnitt 2.4).

Die Darlegung und Begründung der Methode für die empirischen Studien ist Gegenstand von Kapitel 3. Die Resultate dieser Studien werden in den anschließenden Kapiteln 4 und 5 dargestellt.

Im Kapitel 6 wird die Theorie weiterentwickelt. Dazu wird ein erstes Fazit gegeben. Die empirischen Resultate werden zusammengefasst und mit der mathematikdidaktischen Literatur in Bezug gebracht. Darauf aufbauend wird eine Weiterführung der Theorie vorgeschlagen, was zu einem Stufenmodell des Strukturierens führen wird. Dieses Stufenmodell wird zur Konstruktion von Aufgabenformaten genutzt, die die Entwicklung des Strukturierens unterstützen. Das ist Thema des Kapitels 7.

Die Schlussdiskussion der Arbeit findet in Kapitel 8 statt. Alle theoretischen und empirischen Resultate werden resümiert und auf die mathematikdidaktische Literatur bezogen. Die Arbeit endet mit der Diskussion ihrer Grenzen und Perspektiven.

1.1.3 Mathematischer Gegenstand der Arbeit

In diesem Abschnitt wird der mathematische Gegenstand festgelegt: Was ist mit dem Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen in der vorgelegten Arbeit gemeint? Mit Hilfe von vier Aspekten wird auf diese Frage eine Antwort formuliert.

1. Das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen wird hier als Umformen gemäß algebraischen Regeln begriffen. Die Terme und Gleichungen liegen als symbolische Ausdrücke vor, ebenso sind die Umformungsregeln symbolisch notiert. Das Umformen kann als Schlussfolgern in einem formalen Kalkül verstanden werden. Wie in Abschnitt 2.1.1 ausgeführt werden wird, legt ein solcher Kalkül den Aufbau und die Darstellung von algebraischen Ausdrücken sowie die erlaubten Umformungen fest.

   Dieses Verständnis des Vereinfachens von Termen und Lösens von Gleichungen hat sich erst im 19. und 20. Jahrhundert ausgebildet (Alten et al., 2003; Krämer, 1991; Merzbach & Boyer, 2011; Sfard, 2008). Insbesondere meint die vorgelegte Arbeit mit dem „algebraischen Kalkül“

einen formalen Kalkül. Dies im Gegensatz zu den Anfängen der Algebra, wo bis zum 15. Jahrhundert mit algebraischen Verfahren meist geometrische Techniken zur Ermittlung von unbekannten Größen gemeint waren und erst ab dem 17. Jahrhundert die verbalen Beschreibungen den symbolischen Ausdrücken wichen. Damit einher geht nach Krämer (1991, S. 89) eine Verschiebung der Vorstellung vom Operieren mit Symbolen: Das Operieren von Symbolen heißt nicht mehr, „in Wirklichkeit mit den Gegenständen zu operieren, für die die Symbole stehen [... , sondern] nach Regeln zu operieren, die nur auf die sichtbaren Symbole selbst, nicht aber auf die Gegenstände, für die sie stehen, Bezug nehmen.“ Gegenstand ist also jene algebraische Sprache, die sich ab dem 19. Jahrhundert entwickelte und seither als (symbolische) Sprache der Mathematik verstanden wird.

2. Dieses kalkülorientierte algebraische Arbeiten interessiert, weil es typisch in etwa für die Jahrgangsstufen 8 bis 12 ist. Das heißt, Gegenstand ist ein mathematisches Arbeiten, bei dem die einzelnen Umformungen mithilfe von Rechengesetzen begründet werden (sollten) und nicht mithilfe von Überlegungen, die auf einer inhaltlichen Interpretation der algebraischen Zeichen basieren. Wer nach einer Auseinandersetzung mit solch inhaltlichen Denkweisen sucht, sei verwiesen etwa auf Banerjee und Subramaniam (2012), Filloy und Rojano (1989), Herscovics und Linchevski (1994), Krummheuer (1982), Liebenberg, Sasman und Olivier (1999), Linchevski und Herscovics (1996), Malle (1993), Pirie und Martin (1997), Prediger (2009), Slavit (1999), Vlassis (2002), Vollrath und Weigand (2009).

3. Konsequenterweise ist auch die Ausbildung propädeutischer algebraischer Konzepte auf der Primarstufe, also die „frühe“ Algebra, kein zentrales Thema dieser Arbeit. Für die Darlegung und Diskussion dieser Thematik sei verwiesen auf Arbeiten wie Akinwunmi (2012), Berlin (2010), Carpenter, Franke & Levi (2003), Carraher und Schliemann (2007), Carraher, Schliemann, Brizuela und Earnest (2006), Kieran (2004), Warren und Cooper (2008).

1.2 Theoretische Sichtweisen

In diesem Abschnitt werden Sichtweisen identifiziert, unter denen die Frage nach der Art und Weise des Erkennens von algebraischen Umformungen in der mathematikdidaktischen Forschung bislang untersucht wurde. Das Ziel ist die Darlegung davon, wie diese Fragestellung bislang verstanden wurde, welche Hauptthesen daraus resultierten und welche Fragen offen blieben. Die Darstellung folgt – so weit es möglich ist – dem historischen Pfad.

1.2.1 Assoziationismus

Wohl bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts war das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen gleichbedeutend mit dem Anwenden systematisch eingeübter Verfahren. Dabei ist mit „systematisch“ eine Einteilung der Menge aller Aufgaben in Typen gemeint, wobei jedem Typ ein Verfahren zugeordnet ist.

In Thorndike et al. (1926) ist die dahinterliegende Lerntheorie des Assoziationismus beschrieben. Sie war Wegbereiter des späteren Behaviorismus und besagt in aller Kürze: Lernen heißt Bildung von Assoziationen zwischen Stimuli und entsprechenden Reaktionen. Als Stimuli wirken auffallende Merkmale der Reizsituation. Hierbei ist wichtig, dass sich diese auffallenden Teile der Reizsituation dem Lerner anbieten. Thorndike geht somit von einem passiven Organismus aus, dem sich beispielsweise Merkmale eines Aufgabentyps aufdrängen, der Organismus trifft keine aktive Auslese. Beim Lernen wird dann eine Assoziation zwischen einem Aufgabentyp und dessen erfolgreiche Bearbeitung (Reaktion) ausgebildet. Sobald ein Lerner eine Aufgabe bewältigt hat, bildet sich diese Assoziation aus und wird umso stärker, je öfter der Lerner diese Handlung wiederholt. Es entstehen stabile Verbindungen zwischen Aufgabentypen und Verfahren. Wichtig für Thorndike ist, dass pro Stimulus genau eine Reaktion assoziiert wird. Das lässt sich beispielsweise im Zusammenhang mit dem Lösen quadratischer Gleichungen wie $2x^2 + 2x - 24 = 0$ illustrieren. Diese können direkt mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst werden, aber auch durch Faktorisieren oder quadratisches Ergänzen, was je nach Situation deutlich schneller wäre. In Thorndike et al. (1926, S. 273) wird für den Verzicht auf die letzten zwei Methoden votiert: “For the purpose of real life the use of the formula serves not only as well as all three together but better.” Nach Thorndike behindert die Vielfalt der Verfahren die Ausbildung stabiler Assoziationen.

Der Assoziationismus liefert somit eine Modellierung davon, wie Personen lernen, bestimmte Verfahren auf entsprechende algebraische Ausdrücke anzuwenden. Nach dieser Sichtweise schaut man algebraische Ausdrücke an, nimmt auffallende Merkmale wahr und wählt das entsprechende Verfahren aus. Die Frage, wie Personen algebraische Umformungen erkennen, wird zur Frage nach den Merkmalen, welche für die Personen als charakterisierend für einen Aufgabentyp gelten.

Verfahren spielen beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen eine zentrale Rolle. Darin stimmt die vorgelegte Arbeit mit den Überlegungen von Thorndike überein. Allerdings wird hier der passiven Wirkung der Merkmale des Ausdrucks auf die Person, ihre aktive Auseinandersetzung mit dem Ausdruck entgegengesetzt. Insbesondere wählt eine Person aktiv aus, worauf sie in einem Ausdruck schaut und welche Bedeutung sie mit den Teilen im Ausdruck verbindet. Konsequenterweise können identische Merkmale eines Ausdrucks für verschiedene Personen verschiedene Bedeutungen und insbesondere unterschiedliche Reaktionen zur Folge haben. Weil der Assoziationismus diese Phänomene nicht zu erklären vermag, eignet er sich nicht zur theoretischen Fundierung individueller Strukturierungsprozesse.

1.2.2 Gestaltpsychologie

Die Gestaltpsychologie ist – im historischen Kontext – die Antithese zum Assoziationismus. Ihr Grundsatz lautet, dass Lernen mit dem Aufbau von *Einsicht* in Zusammenhänge gleichgesetzt werden kann. Wertheimer (1964) prägt beispielsweise den Begriff des *produktiven Denkens* und setzt ihn den Reiz-Reaktions-Lerntheorien entgegen. Seine Sichtweise illustriert er an mehreren Beispielen, etwa an der Vereinfachung von

$$\frac{274 + 274 + 274 + 274 + 274}{5}.$$

Wertheimer berichtet von Kindern, die gut im Rechnen, aber blind für obige Situation waren. Die meisten addierten sofort die Zahlen des Zählers und nur wenige erkannten den Trick. Für die Kinder war es eine Aufgabe des Vereinfachens eines Bruchs. Offenbar verbanden sie damit das Addieren im Zähler gefolgt vom anschließenden Kürzen. Wertheimer (1964) interpretiert diese Verfahrensorientierung als fehlende Einsicht in die Bedeutung der Division. Denn ihm zufolge muss bei obigem Beispiel die *strukturelle Bedeutung* der Division durch 5 verstanden werden „als die Forderung, den Betrag des Zählers in fünf gleiche Teile zu gliedern, was bereits geschehen war“ (ebd., S. 130).

Nach der Gestaltpsychologie besteht die Lösung eines Problems im Erfassen der Beziehungen der einzelnen Teile zum Ganzen. Steiner (2004) spricht beispielsweise von der „Eingebundenheit in das Ganze, in die Gesamtgestalt“ (ebd., S. 344), vom „Verständnis der Zusammenhänge, des Systems“ (ebd., S. 346–347) und vom „Lernen dieses Zusammenspiels“ (ebd., S. 346). Insgesamt legt die Gestaltpsychologie großen Wert auf das Neuordnen respektive Umstrukturieren. Denn nur so gelingt es den Personen, die Beziehungen zwischen den Teilen einzusehen. Wer beispielsweise ein Problem löst, muss der Gestaltpsychologie zufolge die Funktionen der einzelnen Teile analysieren, vor allem im Hinblick auf ihre Beziehungen zum Ganzen. Er muss lernen, wie die visuell wahrnehmbaren, einzelnen Teile zu einem neuen Ganzen zu kombinieren sind. Unter welchen Voraussetzungen sind die Teile wie miteinander zu arrangieren? Welche Folgen sind mit solchen Umstrukturierungen verbunden? Durch die Auseinandersetzung mit solchen Fragestellungen verschafft man sich schließlich Einsicht in die relevanten Zusammenhänge.

Die Gestalpsychologie betont also die aktive Rolle des Lernenden bei Wahrnehmungsprozessen. Das steht im Gegensatz zum Assoziationismus. Dieser geht von einer passiven Rolle des Lernenden beim Wahrnehmen aus. Dieser Unterschied zwischen Assoziationismus und Gestaltpsychologie ist in Wertheimer (1964, S. 228) festgehalten:

> „Aber wiederum [...] ist, um das Problem wirklich zu lösen, oft erst eine Umgestaltung nötig; das Problem kann unlösbar bleiben, solange man nur auf seine eigenen Wünsche oder Bedürfnisse starrt; es kommt vor, dass es erst lösbar wird, wenn man dazu übergeht, das eigene Verlangen als einen Teil in der Situation zu sehen, und dabei die objektiven Forderungen der Lage entdeckt."

Jene Person, die das Problem lösen will, muss eine solche Sichtweise einnehmen, nach der sie „die objektiven Forderungen der Lage entdeckt". Das ist ein aktiver Prozess.

Das Erkennen von Umformungen aus gestaltpsychologischer Sicht

Das Konzept der Gestaltpsychologie ist in der Literatur nur an wenigen algebraischen Beispielen illustriert. Als mathematische Beispiele werden vorwiegend geometrische Problemstellungen aufgegriffen. Trotzdem scheint mir die Formulierung einer Antwort aus der Sicht dieser Theorie auf die Frage möglich, wie algebraische Umformungen erkannt werden. Denn in der Gestaltpsychologie sind Begriffe wie strukturelle Bedeutung, Beziehung, Umstrukturieren, Teile und Ganzes wichtig. Diese Begriffe nutze ich nun, um das Erkennen von Umformungen nach gestaltpsychologischen Prinzipien zu beschreiben. Folgender Vorschlag scheint gestaltpsychologischen Grundsätzen adäquat zu sein: Algebraische Ausdrücke bestehen aus Teilen. Das Herstellen von Beziehungen zwischen diesen Teilen ist ein Strukturieren des Ganzen. Aus solchen Strukturen folgen angemessene algebraische Umformungen.

Wenn Jahrzehnte später in Fischer (1984) der Begriff der *Geometrie der Terme* gebraucht wird, ist dies eine Reminiszenz an die Gestaltpsychologie. Denn ihr gemäß ist Strukturieren mehr ein Interpretieren der geometrischen Anordnung der Zeichenreihe – und weniger ein Reagieren mit einem Verfahren auf ein Schlüsselmerkmal wie im Assoziationismus. Begrifflich noch näher an der Gestaltpsychologie ist Arcavi (1994) zu verorten, der seinen Symbolsinn als „Gestaltblick" (gestalt view) umschreibt (vgl. Abschnitt 1.2.5).

Die Rolle der gestaltpsychologischen Sichtweise in dieser Arbeit

Die Bestimmung des Begriffs der Strukturierung liegt in der vorliegenden Arbeit nahe an gestaltpsychologischen Ansätzen. In Kapitel 2 wird Strukturieren als ein Herstellen von Bezügen begriffen und gleicht diesbezüglich den gestaltpsychologischen Bezügen zwischen den Teilen und dem Ganzen. Allerdings wird die theoretische Perspektive eine andere sein. Wo die Gestaltpsychologie die Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks wesentlich im Ausdruck selbst verortet, wird sie in dieser Arbeit in der Art und Weise liegen, wie der Ausdruck behandelt werden soll, kann und wird. Insbesondere wird das Strukturieren ganz klar als ein Handeln begriffen – die Gestaltpsychologie versteht es eher als ein „Sehen“.

1.2.3 Prozess-Modelle

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wird die Beschreibung von Denkprozessen stark vorangetrieben. Die entstandenen Studien basieren auf der detaillierten Untersuchung von Denkwegen einzelner Personen (Bernard & Bright, 1984; Larkin et al., 1980; Larkin & Simon, 1987; Matz, 1982; Mayer, 1982; Sleeman, 1984; Stahl, 2000; Tietze, 1988). Wichtig ist die Erkenntnis, dass das Erkennen von Umformungen respektive Umformungsmöglichkeiten ein Prozess ist. Das führt zur Entwicklung von *Prozess-Modellen*. Unter diesem Begriff wird in der vorgelegten Arbeit eine Modellierung des Denkprozesses einer Person verstanden, die beispielsweise wesentliche Teilprozesse, typische Teilschritte oder die Organisation ihrer internen Repräsentationen enthält. Im Fokus stehen vor allem jene Denkprozesse, die relevant beim Problemlösen sind. Einher damit geht, dass manche Forschungsarbeit im Kontext der künstlichen Intelligenz entsteht. Folglich beschreiben einige Prozess-Modelle auch Mechanismen, die formalisiert werden und Grundlage eines Computerprogramms sein können. In diesem Fall wird hier von einem *Computermodell* gesprochen.

Die vorliegende Arbeit stellt exemplarisch solche Prozess-Modelle vor, die meines Erachtens interessant im Hinblick auf das algebraische Umformen sind. Auf zwei Fragen wird ein besonderes Augenmerk gelegt: Erstens: Welche Rolle spielt die Wahrnehmung? Zweitens: Wie werden die Prozesse gesteuert?

Vorab sei mit diesem Abschnitt der Kognitivismus eingeführt. Damit ändert sich die Erklärungsstrategie des Musters, wie Reiz und Reaktion zusammenhängen. Beim Assoziationismus wird die Verbindung von Reiz und intendierter Reaktion verstärkt, einfach weil die Person diese Reaktion in Zukunft nicht vermeiden will. „Der Mensch [ist] ein assoziativer Mechanismus, der so funktioniert, dass Störungen in den Lebensvorgängen der Neuronen vermieden werden“ (Thorndike, 1913, S. 23, zitiert nach Steiner, 2004, S. 41). Der

Kognitivismus erklärt die Verstärkung hingegen nicht aufgrund von physiologischen, sondern aufgrund von psychologischen Bedingungen: Die Verbindung von Reiz und Reaktion wird vermittelt durch die *Vorstellung* vom Ziel der Reaktion. Eine lernende Person entwickelt eine Vorstellung davon, was sie bei einem bestimmten Reiz wie zu tun hat. Die Verstärkung der Verbindung von Reiz und Reaktion hat beim Kognitivismus eine informative Funktion und leitet das Handeln der lernenden Person. Beim Assoziationismus hat die Verstärkung hingegen eine rein selektive Funktion.

Wie eine solche Vorstellung, die zwischen Reiz und Reaktion vermittelt, konzipiert werden kann, war und ist Thema der Kognitionspsychologie. Im Zuge der Jahrzehnte entwickelte sie entsprechende theoretische Ansätze. Begriffe wie interne Repräsentation, Schema, mentales Modell, kognitive Prozesse und eben auch Prozess-Modelle und Computermodelle wurden und sind wichtig (vgl. beispielsweise Eysenck & Keane (2010) oder auch Steiner (2004)).

Die Rolle der Wahrnehmung in Prozess-Modellen

Prozess-Modelle unterscheiden sich unter anderem darin, inwiefern sie Wahrnehmungsprozesse mitmodellieren oder nicht. Einige Modelle beschreiben „nur“, wie interne Regeln auf internen Repräsentationen operieren, Wahrnehmungsprozesse spielen keine Rolle. Andere Modelle umfassen hingegen auch die Bildung der internen Repräsentation, Wahrnehmungsprozesse sind wesentlich.

Ein Beispiel für ein Prozess-Modell mit der Beschränkung auf das Operieren von internen Regeln auf internen Repräsentationen ist in Mayer (1982) beschrieben. Im entsprechenden Computermodell ist ein algebraischer Ausdruck als Proposition dargestellt. Eine Gleichung wie $\frac{8+3x}{2} = 3x - 11$ ist als Rechenbaum kodiert, wie Abbildung 1.1 illustriert. Ein solcher Rechenbaum

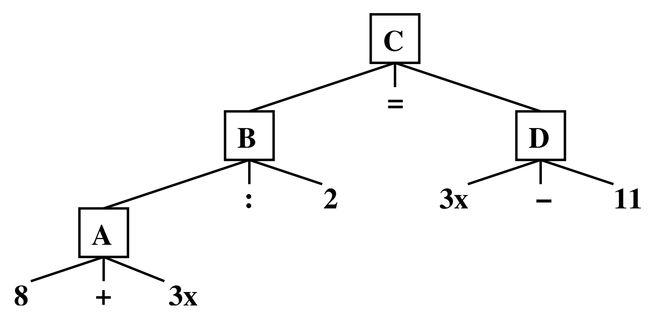

Abbildung 1.1: Rechenbaum der Gleichung $\frac{8+3x}{2} = 3x - 11$ nach Meyer (1982, S. 450).

entspricht der internen Repräsentation des algebraischen Ausdrucks und wird bei der eigentlichen Implementation des Modells als String (also als Zeichenkette und nicht etwa als Bild) kodiert, bestehend aus Symbolen für Zahlen, Variablen und Operationszeichen sowie für Klammern und das Gleichheitszeichen. Kodiert wird allein der syntaktische Aufbau des Ausdrucks. Informationen über die grafische, zweidimensionale Anordnungen der Zeichen im repräsentierten Term spielen keine Rolle.

Das Erkennen von Umformungen ist in solchen Computermodellen gleich dem Zutreffen von Bedingungen. Denn implementierte Strategien bestimmen, welche Regeln auf den internen Repräsentationen operieren. Beispielsweise modelliert Mayer (1982) unter anderem die Reduktions- sowie Isolationsstrategie bei linearen Gleichungen. Sein Modell basiert auf Regeln in der Form von klassischen If-Then-Anweisungen. Damit sind Fallunterscheidungen nach dem Schema „Wenn A, dann B" gemeint. Für die Isolationsstrategie sind zwei If-Then-Anweisungen nötig:

1. If: Auf beiden Seiten der Gleichung kommt die Variable x vor.

   Then: Schiebe alle x auf die linke Seite und fasse sie zusammen.

2. If: Auf beiden Seiten der Gleichung kommen Zahlen als Summanden vor.

   Then: Schiebe alle reinen Zahlsummanden auf die rechte Seite und fasse sie zusammen.

Das Erkennen einer Umformung wird zum Überprüfen von explizit vorgegebenen Kriterien. Ist beispielsweise eine der obigen Bedingung erfüllt – und das ist mechanisch durchführbar –, dann kann entsprechend umgeformt werden.

Mit Mayer (1982) ist ein Prozess-Modell vorgestellt, das die internen Repräsentationen als gegeben voraussetzt. Andere Forschungsgruppen interessieren sich hingegen gerade für die Bildung solcher internen Repräsentationen. Konsequenterweise sind dann Wahrnehmungsprozesse wichtig. Grundlage ist die Erkenntnis, dass die Wahrnehmung eines algebraischen Ausdrucks als eine Auseinandersetzung zwischen den entdeckbaren Informationen im Ausdruck und den Konzepten jener Person verstanden werden kann, die gerade umformt. In der entsprechenden Literatur spricht man von *aufsteigenden* (*bottom-up*) Prozessen, die vom Gedruckten, und von *absteigenden* (*top-down*) Prozessen, die vom Vorwissen der Person her vorwärtsschreiten (Guski, 2000, S. 68; Steiner, 2004, S. 202).

Ein Beispiel für das Aufzeigen der Relevanz von Wahrnehmungsprozessen beim algebraischen Umformen ist Kirshner (1989). Dieser Autor zeigt, dass das Erkennen der Hierarchie der Operationen in einem Ausdruck als rein visuelles Schließen modelliert werden kann: Was näher zueinander steht, gehört zusammen. Am stärksten miteinander verbunden sind Variablen, die diagonal zueinander stehen wie a^b oder $\sqrt[b]{a}$. Dann folgen Operationen, bei denen die Variablen direkt nebeneinander oder untereinander stehen wie ab oder $\frac{a}{b}$. Die zuletzt auszuführenden Operationen sind durch große Zwischenräume charakterisiert wie $a + b$ oder $a - b$. Prinzipiell könnte mit der Syntax der algebraischen Notation, also mit der Schreibweise der Terme und Gleichungen, allein aufgrund metrischer Eigenschaften umgegangen werden.

Kirshner und Awtry (2004) erweitern dieses Modell. Auch das Umformen kann als Wahrnehmungsprozess erklärt werden. Dazu führen die Autoren die *visuelle Augenscheinlichkeit* (visual salience) von Regeln ein. Regeln wie $(xy)^z = x^z y^z$ und $x(y + z) = xy + xz$ sind visuell augenscheinlich. Die linke und rechte Seite des Gleichheitszeichens erscheinen in natürlicher Weise aufeinander bezogen. Regeln wie $\frac{w}{x} : \frac{v}{y} = \frac{wy}{xv}$ und $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ sind visuell nicht augenscheinlich.

Diese Überlegungen nutzen Kirshner und Awtry zu einer neuen Erklärung von Fehlern wie $(x+y)^c = x^c+y^c$. Klassisch wird dies als *kognitive* Übergeneralisierung erklärt (Malle, 1993; Matz, 1982). Kirshner und Awtry sehen diesen Fehler hingegen als *wahrnehmungsgesteuerte* Übergeneralisierung. Denn nahezu alle Fehler, die durch eine kognitive Übergeneralisierung erklärt werden, beruhen auf visuell augenscheinlichen Regeln. Zum Beispiel kann nach Kirshner und Awtry der Fehler $(x+y)^c = x^c+y^c$ als wahrnehmungsgesteuerte Übergeneralisierung der visuell augenscheinlichen Regel $(x + y)c = xc + yc$ erklärt werden. Eine nicht visuell augenscheinliche Regel wird dagegen kaum übergeneralisiert. Die nicht visuell augenscheinliche Regel $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ wird kaum zu $x^2+y^2 = (x+y)(x-y)$ übergeneralisiert. Lernende werden also durch die visuelle Augenscheinlichkeit verführt. Sie übergeneralisieren wahrnehmungsbasierte Schemata und nicht kognitive (die sie dann „unkritisch“ anwenden (Malle, 1993, S. 174)). Mit anderen Worten: Möglicherweise sind die typischen Fehler der Algebra auf Probleme mit der Wahrnehmung und nicht mit der Kognition zurückzuführen. Solche Ergebnisse sind in neueren Studien wie Landy und Goldstone (2007a, 2007b), Ottmar, Landy und Goldstone (2012) oder Kellman, Massey und Son (2009) repliziert und erweitert. Analog argumentiert Hewitt (2003).

Die Steuerung von Prozessen

Prozess-Modelle unterscheiden sich nicht nur im unterschiedlichen Einbezug von Wahrnehmungs-, sondern auch von Steuerungsprozessen. In Computermodellen wie jenem von Mayer (1982) sind die Umformungen im Voraus festgelegt durch die implementierten Strategien, insbesondere ihre Bedingungsklauseln. Zu steuern gibt es nichts mehr, der Algorithmus muss einfach abgearbeitet werden.

Andere Prozess-Modelle umfassen hingegen sogenannte *metakognitive Prozesse* wie das Wahrnehmen, Evaluieren und Regulieren (Wilson & Clark, 2004) respektive das Planen und Evaluieren des eigenen Denkens (Schoenfeld, 1985). Die Wichtigkeit des Planens beim algebraischen Umformen ist etwa in Wenger (1987) illustriert. Jener Autor führt als Beispiel das Auflösen von $v\sqrt{u} = 1+2v\sqrt{1+u}$ nach v an. Diese Gleichung legte er 64 Studienanfängern vor. 20 meisterten die Gleichung, die restlichen 44 nicht. Letztere ließen sich vor allem von den Wurzelausdrücken in u verführen, indem sie beispielsweise auf beiden Seiten quadrierten. Solche unangemessenen Umformungen sind gemäß Wenger typisch für ein planloses Vorgehen. Seines Erachtens besteht Planen im Untersuchen der Struktur von $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$ als Gleichung in v. Entscheidend dabei ist das *verallgemeinerte Substitutionsprinzip* (generalized substitution principle). Es meint im Fall von $v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$, dies als substituierten Ausdruck von $vA = 1 + 2vB$ zu erkennen.

Ein ähnlichen Beispiel nutzt Schoenfeld (1987) zur Illustration der Notwendigkeit von Evaluationsprozessen. Er bat Studierende, die Gleichung $x^2y + 2xy + x - y = 2$ nach y aufzulösen. Sie formten meistens so um, dass nach mehreren Schritten eine schwierigere Situation entstand. Einige brachten das isolierte y nach rechts, klammerten dann bei x^2y+2xy das y aus und anschließend auch das x. Danach brachten sie weitere Teile nach rechts etc. Jeden Zwischenschritt behandelten sie wie eine neue Gleichung. Nur wenige untersuchten die ausgeführten Umformungen auf den Nutzen im Hinblick auf die Lösung. Offenbar fassten sie die Problemstellung anders auf als beispielsweise Experten. Schoenfeld (1985, 1987) – oder etwa auch Muis (2008) – betont aus diesem Grund die Abhängigkeit der Planungs- und Evaluationsprozesse von den Überzeugungen und Vorstellungen einer Person. Wer beispielsweise nicht weiß, dass eine Umformung gewinnbringend sein sollte, evaluiert seine Umformungen nicht auf dieses Kriterium bezogen.

Durch Einbezug der Metakognition wird das Erkennen von Umformungen mehr als ein mechanisches Überprüfen des algebraischen Ausdrucks auf das (Nicht-)Erfüllen von Bedingungen. Die erkannte Umformung ist dann das Ergebnis eines Prozesses. Planungsschritte und Schlussfolgerungen aus Evaluationen führen schließlich zur Umformung.

Mehrere Studien belegen, dass mit zunehmender Expertise auch die metakognitiven Fähigkeiten zunehmen (Bookman, 1993; Carlson & Bloom, 2005; Kramarski, Mevarech & Arami, 2002; Schoenfeld, 1985). Dies drückt sich typischerweise durch eine zunehmende Orientierung am Ziel aus. Allerdings ist die Ausbildung metakognitiver Fähigkeiten ein überaus anspruchsvolles Unternehmen (Lester, 1994).

Die Rolle von Prozess-Modellen in dieser Arbeit

Prozess-Modelle machen klar, dass Denken *und* Wahrnehmen ein Prozess ist. Entsprechend geht diese Arbeit davon aus, dass auch das Strukturieren algebraischer Ausdrücke ein Prozess ist. Dieser orientiert sich an einem Ziel, bei fortgeschrittenen Lernenden etwa am Finden der Lösung der vorgelegten Gleichung, wie in dieser Arbeit gezeigt werden wird. Insofern spiegeln sich wesentliche Merkmale von Prozess-Modellen auch in Prozessen des Strukturierens. Allerdings werden in dieser Arbeit solche Prozesse nicht kognitionspsychologisch beschrieben. Vielmehr wird sich deren Beschreibung an semiotischen Ansätzen orientieren wie dem sozio-kulturellen Zugang von Radford (2000, 2002, 2003, 2010a), dem diagrammatischen Denken von Dörfler (2006a, 2006b, 2008) sowie den onto-semiotischen Konzeptionen, dargestellt in Font, Godino und Gallardo (2013), Godino und Batanero (1998, 2003) sowie Godino, Batanero und Font (2007).

Bei diesen Ansätzen wird das Lernen wesentlich als Konstruieren von Bedeutung begriffen. Es geht um die Frage, wie der Unterricht „zur angemessenen Konstruktion der erwünschten *Bedeutung* von Zeichen“ beitragen kann (Bauersfeld, 2000, S. 401). Dabei manifestiert sich die Konstruktion von Bedeutung in entsprechenden Handlungen, wird beobachtbar und somit der Empirie zugänglich. Insgesamt haben sich oben aufgeführte Ansätze bislang für die Untersuchung jenes Algebra-Unterrichts bewährt, in dem gerade der Übergang von der Arithmetik zur Algebra vollzogen wird. Bei diesem Übergang interessiert nämlich, wie Lernende beginnen, von konkreten Situationen zu abstrahieren und zu verallgemeinern und sich dabei erste Komponenten der Bedeutung von algebraischen Ausdrücken konstruieren müssen (Font, Godino & Batanero, 2013; Radford, 2003). In Kapitel 2 wird aufgezeigt werden, wie auch das kalkülorientierte algebraische Umformen als Konstruktion von Bedeutung konzipiert werden kann – und warum sich dazu eine semiotische Sichtweise eignet.

1.2.4 Die Struktur eines algebraischen Ausdrucks

Der Begriff der Struktur eines algebraischen Ausdrucks ist seit der wegweisenden Arbeit von Kieran (1989) zentral für mathematikdidaktische Studien zur Algebra. In dieser Arbeit fasst Kieran den Stand der damaligen Forschung über die Schwierigkeiten der Lernenden im Algebraunterricht zusammen. Ihr Schluss war, dass die Lernenden am meisten Probleme mit dem Erkennen und Gebrauchen von Strukturen haben. Diese Feststellung wurde und wird immer noch von einer Vielzahl von Autoren unterstützt (Booth, 1989; Hoch, 2007; Hoch & Dreyfus, 2010; Kirshner, 1989; Malle, 1993; Linchevski & Livneh, 1999; Pomerantsev & Korosteleva, 2003; Trigueros & Ursini, 2008).

Kieran stellte ihre Arbeit während einer viertägigen Konferenz 1987 zur Schulalgebra an der Universität Georgia in den Vereinigten Staaten vor. Ziel der Konferenz war erstens der Austausch unter den Wissenschaftsgruppen und zweitens die Ausarbeitung von zukünftigen, von allen als wesentlich erachteten Forschungsfragen zur Schulalgebra. Denn ab etwa 1980 war in den Vereinigten Staaten die Zahl von theoretischen und empirischen Studien zum Lehren und Lernen der Schulalgebra so rasant angestiegen, dass sich eine Bündelung dieser innovativen Kräfte aufdrängte.

Oberflächen- und Systemstruktur

Im entsprechenden Beitrag (Kieran, 1989) schlägt Kieran vor, unter der Struktur eines Terms sowohl seinen operativen Aufbau als auch die mit den entsprechenden Operationen verbundenen Eigenschaften zu subsumieren. Vor allem der Einbezug des zweiten Aspekts ist wesentlich. Denn dadurch geht Strukturieren über das Ausführen der durch einen Term repräsentierten Rechnung hinaus, es meint vielmehr das Erkennen von Umformungen.

Die entsprechenden zwei Aspekte nennt Kieran *Oberflächenstruktur* (surface structure) und *Systemstruktur* (systemic structure). Die Oberflächenstruktur eines algebraischen Ausdrucks beschreibt seinen syntaktischen Aufbau. Sie umfasst die vorkommenden Operationen, deren Hierarchie sowie im Falle einer Gleichung die Gleichheit der beiden Terme links und rechts des Gleichheitszeichens. Die Systemstruktur umfasst die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der im Ausdruck dargestellten Operationen und Relationen im Hinblick auf mögliche Umformungen. In diesem Sinne weist die Systemstrukur auf alle äquivalenten Formen, zu denen ein Term gemäß den Rechengesetzen umgeformt werden kann, beziehungsweise auf alle Gleichungen, die zu einer Gleichung äquivalent sind. Durch einen solchen Begriff von Struktur macht Kieran klar, dass Umformungen einem algebraischen Ausdruck nicht mitgegeben sind, sondern von den Schülerinnen und Schülern durch Strukturieren des Ausdrucks herauszuarbeiten sind. Für Kieran ist Strukturieren gleich dem Erkennen von korrekten Umformungen.

Die Systemstruktur kann als das Erkennen von äquivalenten algebraischen Ausdrücken operationalisiert werden. Diese Fähigkeit ist beispielsweise zentral für einen produktiven Umgang mit Computer-Algebra-Systemen (CAS). Denn die Darstellung eines Ausdrucks auf dem Bildschirm eines CAS-Rechners stimmt nicht immer überein mit den vorgegebenen oder benötigten Darstellungen auf Papier. Wer zum Beispiel $\frac{a+p}{q}$ eintippt, muss wissen, dass dies äquivalent ist zu $(a+p)/q$ aber nicht zu $a+\frac{p}{q}$ (Ball, Pierce & Stacey, 2003). Man muss also sofort erkennen können, ob ein Ausdruck mit einem anderen äquivalent ist oder nicht. Das Erkennen der Systemstruktur ist entscheidend. Empirische Untersuchungen belegen, dass Lernende damit enorm Mühe haben

(Ball, Pierce & Stacey, 2003; Ball, Stacey & Pierce, 2001; Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990).

Termstrukturen

Was das Werk von Kieran (1989) für die Vereinigten Staaten ist, ist jenes von Malle (1993) für den deutschsprachigen Raum. Es ist immer noch das Standardwerk für die Mathematikdidaktik der elementaren Algebra. In diesem Buch spielt das Erkennen von *Termstrukturen* eine zentrale Rolle, was sich etwa im folgenden Zitat ausdrückt:

> „Viele Lehrer sind sich der Tatsache gar nicht bewusst, dass dem Umformen algebraischer Ausdrücke ein Termstrukturerkennen zugrundeliegt. Man begnügt sich daher meist mit einem ‚endlosen' Üben des Umformens, ohne gezielt auf diese Voraussetzung – die man geradezu als ‚crux' aller Schülerfehler beim Umformen ansehen kann – einzugehen." (ebd., S. 254)

Malle versteht unter dem Erkennen von Termstrukturen das Aufteilen des Ausdrucks in Teilterme. Beispielsweise können in der linken Seite der Gleichung $4x + 3 = 11$ drei verschiedene Termstrukturen erkannt werden. Sie sind in Abbildung 1.2 gezeigt. Diese Termstrukturen geben Aufteilungen der

$$\boxed{4 \cdot x + 3} = 11 \qquad \boxed{4 \cdot x} + \boxed{3} = 11 \qquad \boxed{4} \cdot \boxed{x} + \boxed{3} = 11$$

Abbildung 1.2: Drei Termstrukturen der Gleichung $4x + 3 = 11$ nach Malle (1993, S. 189)

linken Seite der Gleichung $4x + 3 = 11$ in einzelne Einheiten an. Sie sind durch die Gesetze, die den Aufbau eines Terms regeln, bestimmt. Je nach Aufteilung wird eine andere Umformung erkannt. In Abbildung 1.2 etwa ist das Finden einer anwendbaren Regel nur im mittleren Fall wahrscheinlich, $A + B = C \iff A = C - B$ böte sich an. Das heißt, Erkennen von Umformungen basiert nach Malle auf dem Erkennen von Termstrukturen.

Struktur versus Kohärenz

Die Betonung der Struktur macht deutlich, dass sich aus den einzelnen Symbolen keine Information gewinnen lässt, sondern nur aus den Beziehungen zwischen ihnen. Darin besteht die Analogie zwischen der algebraischen und einer natürlichen Sprache: Was bei einem algebraischen Ausdruck die Struktur ist, ist bei einem Text die Kohärenz. Entsprechend korrespondiert die

Syntax des algebraischen Kalküls zur Grammatik der natürlichen Sprache. Die Art und Weise des Erkennens von Umformungen ist dann eine Art und Weise des Schlussfolgerns. Die aus einer Struktur gefolgerten Umformungen korrespondieren zu den aus einem Text gezogenen Inferenzen (Singer, 1994).

Vor dem Hintergrund dieser Analogie erklärt sich die beträchtliche Anzahl von Studien, die den algebraischen Kalkül unter dem Gesichtspunkt der Sprache betrachteten. Dabei wird einerseits die Theorie und andererseits die Empirie vorangetrieben. Beispielsweise stellen Drouhard und Teppo (2004) dar, dass der algebraische Kalkül aus theoretischer Sicht als Sprache mit eigener Syntax, Semantik und Pragmatik aufgefasst werden kann. Empirische Arbeiten wie MacGregor und Price (1999) oder auch MacGregor und Stacey (1997) gehen der Frage nach, inwiefern sprachliche und algebraische Fähigkeiten korrelieren. Ein zentrales Resultat ist, dass nur jene Lernenden angemessen mit der algebraischen Notation umgehen können, die über *metalinguistische Bewusstheit* (metalinguistic awareness) verfügen. Dabei bezeichnet die metalinguistische Bewusstheit die Fähigkeit, über Grammatik und Orthographie reflektieren zu können. Ein metalinguistisch bewusstes Kind hört, dass sich beispielsweise Mayonnaise und Käse reimen, und ist dann erstaunt, wenn die beiden Wörter unterschiedlich geschrieben werden.

Ein anderer Forschungszweig fokussiert auf das „Parsen“ der als Zeichenreihen gegebenen algebraischen Ausdrücke. Erste Überlegungen dazu hält beispielsweise schon Bernard (1983) fest. Doch erst Jahre später finden empirische Studien dazu statt. So untersuchen Jansen und Yelland (2003) sowie Jansen, Marriott und Yelland (2007), inwiefern algebraische Ausdrücke gleich oder anders als Wörter und Sätze der natürlichen Sprache gelesen werden. Als empirisches Instrument dient die Messung von Augenbewegungen, wie es bei Studien zum Decodieren der semiotischen Information von Texten auch der Fall ist (Ballstaedt, Mandl, Schnotz & Tergan, 1981; Grzesik, 1990). Gemäß den Auswertungen scheinen zumindest Experten algebraische Ausdrücke tendenziell von links oben nach rechts unten zu lesen, wenn sie aufgefordert werden, sich diese zu merken.

Der Begriff der Struktur in dieser Arbeit

Als Struktur eines algebraischen Ausdrucks wird in der Mathematikdidaktik typischerweise eine mathematische, objektive Eigenschaft des Ausdrucks verstanden, welche hilfreich für das Umformen des Ausdrucks ist. Insofern ist der Begriff der Struktur ein Begriff der mathematischen Theorie. Diese Prämisse steht beispielsweise hinter den Ansätzen von Kieran (1989) respektive Malle (1993). Zur Rekonstruktion von individuellen Lern- und Denkwegen sind hingegen Begriffe zur Beschreibung der mathematischen Praxis, also des mathematisch Tätigseins, geeigneter. Insofern spielt der Begriff der Struktur in dieser Arbeit nur eine Nebenrolle. Die Hauptrolle wird der Begriff der Struktur*ierung* einnehmen. Er wird in Kapitel 2 eingeführt und ist als eine individuell hergestellte Struktur eines Ausdrucks zu verstehen.

Nebst dem Begriff der Struktur werden in den folgenden Kapiteln auch die mit diesem Begriff verbundenen und von Kieran (1989) und Malle (1993) herausgearbeiteten Aspekte ausdifferenziert. Welche Operationen erkennt eine Person in einem Ausdruck? Welche sind für sie wichtig, welche unwichtig? Welche Eigenschaften der Operationen nutzt die Person, welche nicht? Wie teilt die Person die zweidimensionale Anordnung des Ausdrucks auf? Welche Teile bezieht sie wie aufeinander? Das sind die Fragen, die interessieren werden.

1.2.5 Struktur- und Symbolblick

Indem Kieran und Malle die Struktur – insbesondere die Systemstruktur – betonen, rückt der Ausdruck als Ganzes in den Fokus. Das Erkennen von Umformungen ist offenbar nicht eine Funktion von einzelnen Merkmalen des Ausdrucks, sondern von seiner Struktur. Das Wahrnehmen von Mustern – von Strukturen eben – wird wichtig. Zur begrifflichen Fassung der entsprechenden Fähigkeit schlägt die Mathematikdidaktik Konstrukte wie Strukturblick und Symbolblick vor. Diese werden nun vorgestellt.

Strukturblick

Wer fähig ist, algebraische Ausdrücke zu strukturieren, verfügt über einen *Strukturblick* (structure sense). Linchevski und Livneh (1999) gebrauchen in ihrer Arbeit diesen Begriff das erste Mal. Sie geben damit der Fähigkeit „to use equivalent structures of an expression flexibly and creatively“ (ebd., S. 191) einen Namen.

In Hoch und Dreyfus (2004, 2005), Hoch (2007) sowie Novotna und Hoch (2008) werden in der Folge Operationalisierungen des Konstrukts des Strukturblicks vorgeschlagen für den Inhaltsbereich des Faktorisierens. Drei Fähigkeitsstufen des Strukturblicks sind definiert. Diese bestehen für Situationen des Faktorisierens darin,

1. eine bekannte Struktur in ihrer einfachsten Form zu erkennen, beispielsweise $81 - x^2$ als $a^2 - b^2$,

2. eine komplexere Form durch Substitution auf eine bekannte Struktur zurückführen, beispielsweise $(2x+3)^2-12(2x+3)+36$ durch Substitution von $a = 2x + 3$ und $b = -6$ auf $a^2 + 2ab + b^2$,

3. eine komplexere Form umzuformen, eventuell zu substituieren und so auf eine bekannte Struktur zurückzuführen, beispielsweise $24x^6y^4 - 150z^8$ durch Umformung und Substitution auf $6(a^2 - b^2)$.

Diese drei Stufen sind vor dem Hintergrund vorgegebener, bekannter Strukturen zu sehen. In Hoch und Dreyfus (2010) sind fünf solcher Strukturen angegeben, welche wichtig für die Sekundarstufe I sind: $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$, $ab + ac + ad$, $ax + b = 0$ und $ax^2 + bx + c = 0$. Obige drei Stufen entsprechen Schwierigkeitsgraden, in einem vorgegebenen Ausdruck eine dieser fünf Strukturen zu erkennen.

Das Strukturieren ist bei Hoch und Dreyfus ein Klassifizieren in bekannte Strukturen. Klassifizieren meint dabei, ein Erkennen von Substitutionen und Umformungen, um den vorgelegten Ausdruck auf eine bekannte Struktur zu bringen. Die beiden Ausdrücke $30x^2 - 28x + 6$ und $(5x-3)(6x-2)$ mögen dies illustrieren (Hoch & Dreyfus, 2004). Sowohl bei $30x^2 - 28x + 6$ als auch bei $(5x-3)(6x-2)$ ist gemäß den Autoren die Struktur $ax^2 + bx + c$ zu erkennen. Denn einerseits kann bei $30x^2 - 28x + 6$ mit wenigen Substitutionen diese Form hergestellt werden. Andererseits kann $(5x - 3)(6x - 2)$ ausmultipliziert und auf die Form $ax^2 + bx + c$ gebracht werden. Die zu erkennende Struktur ist hier die Normalform der quadratischen Ausdrücke. In diesem Sinne kann man sagen: Das Erkennen von Umformungen ist bei Hoch und Dreyfus ein Erkennen von Typen von Termen und Gleichungen.

Aus begrifflicher Sicht ist interessant, dass für Hoch und Dreyfus die unterschiedlichen Darstellungen, der „quadratische Ausdruck“ $30x^2 - 28x + 6$ sowie das „Produkt zweier Linearfaktoren“ $(5x-3)(6x-2)$, zwei unterschiedliche *Interpretationen* derselben Struktur $ax^2 + bx + c$ sind. Dies macht noch deutlicher, dass für Hoch und Dreyfus die Struktur einem Aufgabentyp entspricht und dass sie daher als mathematische Eigenschaft verstanden wird, die dem Ausdruck zugeordnet ist (analog zu den Ansätzen von Kieran (1989) und Malle (1993)).

Der Begriff des Strukturblicks findet auch außerhalb des Umgangs mit dem formalen algebraischen Kalkül Anwendung. Beispielsweise nutzt ihn Lüken (2012) zur Untersuchung davon, wie Schulanfänger Muster und Strukturen erkennen. Und Janssen (2012) thematisiert den Strukturblick beim Aufstellen von Gleichungen, die reale Situationen modellieren. Insbesondere fragt er nach der Förderung des Strukturblicks im alltäglichen Klassenunterricht der Sekundarstufe I. Wichtig scheint eine Eingrenzung der relevanten Einflussfaktoren zu sein, wie etwa die Rolle des *Struktursehens* (Bikner-Ahsbahs, 2005).

Symbolblick

Der Begriff des *Symbolblicks* (symbol sense) ist eine Verallgemeinerung des Zahlenblicks (Arcavi, 1994, 2005). Dabei ist der Begriff des Zahlenblicks in einem umfassenden Sinne wie etwa bei Rathgeb-Schnierer (2006) oder Schütte (2008) gemeint. Er umfasst also ein Wissen über Zahleigenschaften und -beziehungen, Aufgabeneigenschaften und -beziehungen sowie über Strategien.

Symbolblick meint mehr als Strukturblick. Der Symbolblick umfasst neben dem flexiblen Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen auch funktionale und anwendungsorientierte Aspekte von algebraischen Ausdrücken. Trotz dieses breit gefassten Begriffs des Symbolblicks ist es erhellend, was Arcavi darüber im Hinblick auf das algebraische Umformen sagt. Anhand der Gleichung $\frac{2x+3}{4x+6} = 2$ illustriert er die Erwartung einer Person, welche versucht „to ‚read' meaning into the symbols" (Arcavi, 1994, S. 27). Seines Erachtens umfasst Symbolblick die Fähigkeit, diese Gleichung zu analysieren und so auf verführende Standardverfahren wie das Wegmultiplizieren der Nenner verzichten zu können. Nur Personen mit Symbolblick bemerken, dass der Zähler die Hälfte des Nenners ist und folglich die Gleichung gar keine Lösung hat.

Diese Fähigkeit, zuerst die Gleichung anzuschauen und zu analysieren, ohne sofort ein Verfahren anwenden zu wollen, kann als metakognitive Fähigkeit verstanden werden. Damit stützt Arcavi einmal mehr die Aussagen von Schoenfeld und Wenger im Abschnitt 1.2.3 über die Wichtigkeit von Planung und Evaluation beim algebraischen Umformen.

Der Symbolblick ist ein umfassender Begriff. Er wird in verschiedenen Anforderungsbereichen benötigt, beispielsweise auch bei der Arbeit mit CAS-Rechnern. Pierce und Stacey (2001, 2002) bezeichnen diesen Teilbereich des Symbolblicks als *algebraischen Tiefenblick* (algebraic insight). Er wird benötigt beim Lösen von algebraischen Problemen mithilfe eines CAS-Rechners, sowohl beim rein algebraischen Arbeiten als auch beim Verbinden von algebraischen, numerischen und grafischen Darstellungen.

Die Rolle des Struktur- und Symbolblicks in dieser Arbeit

Mit den Begriffen des Struktur- und Symbolblicks wird das Strukturieren in den Vordergrund gestellt. Damit geht eine Verschiebung des Fokus einher. Nicht mehr das Umformen wird untersucht, sondern seine Voraussetzung, das Strukturieren. Genau das ist das Thema dieser Arbeit.

In Kapitel 2 wird Strukturieren als ein Handeln begriffen werden: Einzelne Teile eines Ausdrucks werden aufeinander bezogen, um im Sinne von Hoch und Dreyfus den spezifischen Aufgabentyp kenntlich zu machen oder um im Sinne von Arcavi relevante Verbindungen zwischen den einzelnen Teilen zu explorieren. Dieser Aspekt des Handelns wird wichtig werden hinsichtlich seiner bedeutungskonstituierenden Wirkung. Zur Entwicklung der entsprechenden Theorie werden semiotisch-pragmatische Ansätze genutzt. Im Folgenden Abschnitt wird aufgezeigt werden, wie gegen Ende des zwanzigsten Jahrhunderts die Begriffsbildung vermehrt mit solchen Ansätzen beschrieben wird und wie insbesondere die Bedeutung von Begriffen darin verortet wird, wie Personen mit ihnen handeln.

1.2.6 Semiotische Ansätze

Mit einem algebraischen Ausdruck auf einem Blatt Papier liegen Zeichen vor. Daher bieten sich Mittel der Semiotik, also der „Theorie der Zeichen" an, wenn beschrieben und geklärt werden soll, wie algebraische Umformungen erkannt werden. Im Zentrum steht dann das extern Gegebene und nicht seine allfällig interne Repräsentation.

Jeder semiotische Ansatz basiert auf der Unterscheidung zwischen Zeichen und Bedeutung. Diese Unterscheidung ist eminent. Denn nur so kann man von unterschiedlichen Bedeutungen – und nicht nur von *der* Bedeutung – desselben Zeichens sprechen. Beispielsweise bedienen sich jene semiotischen Ansätze, die den Werken von Charles S. Peirce folgen, dem *semiotischen Dreieck*, um solche unterschiedlichen Bedeutungen erklären zu können (für einen Überblick solcher Ansätze sei auf Hasemann, Hefendehl-Hebeker und Weigand (2006) verwiesen). Abbildung 1.3 zeigt ein solches semiotisches Dreieck. Darin ist das Zeichen als Stellvertreter zu verstehen, es vertritt den Sachverhalt (das Objekt), um den es geht, respektive den, der mit dem Zeichen gemeint ist. Der Interpretant entspricht der Interpretation, der „Bedeutung" des Zeichens, die ihm jene Person gibt, die das Zeichen gerade sieht. Die unterschiedlichen Wei-

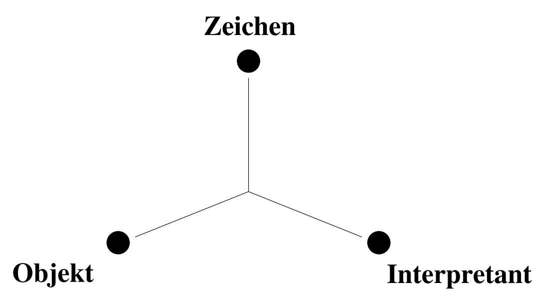

Abbildung 1.3: Das Semiotische Dreieck von Charles S. Peirce nach Hoffmann (2005, S. 41)

sen des Zusammenspiels von Zeichen, Objekt und Interpretant erklären die unterschiedlichen Weisen, „wie uns etwas gegenwärtig sein kann" (Hoffmann, 2006, S. 41), respektive, was ein bestimmtes Zeichen für eine Person bedeuten kann. Beispielsweise kann dasselbe Zeichen die Funktion eines *Ikons*, *Indexes* oder *Symbols* haben, abhängig von der Person. Ein algebraischer Ausdruck wie $2(x-4)+3(x-4)$ kann demnach von einer Person als Ikon verstanden werden.

Das heißt, die dargestellte Zeichenreihe als Solches (als gedrucktes Schwarz auf weißem Papier) ist wichtig – losgelöst von algebraischen Regeln. Obiger Term wird dann etwa als Term mit zwei gleichen Teilen $(x - 4)$ oder als Term mit einem Kreuz (dem Pluszeichen) interpretiert. Wird obiger Ausdruck hingegen als Index begriffen, dann wird er so interpretiert, dass er auf etwas verweist: auf das Ausmultiplizieren oder auf das Einsetzen von Zahlen etc. Die im Ausdruck vorkommenden Zeichen können schließlich als Symbole aufgefasst werden. Deren Gebrauch ist durch Konventionen geregelt, welche syntaktische Regeln des Termaufbaus oder auch Rechengesetze wie Assoziativität, Kommutativität und Distributivität umfassen. Somit beschreiben ikonisch, indexikalisch und symbolisch unterschiedliche Weisen, wie Personen Zeichen interpretieren. Davis und McGowen (2001) gehen noch einen Schritt weiter. Ihres Erachtens zeigt sich in der Entwicklung von algebraischer Expertise so etwas wie eine Abfolge vom Ikon zum Index zum Symbol. Zusammenfassend: Das semiotische Dreieck ermöglicht es, von der Bedeutung eines Zeichens für eine Person zu sprechen und nicht nur von der Bedeutung eines Zeichens. Es erlaubt eine Individualisierung davon, was ein vorliegendes Zeichen meint.

Hingegen ist das semiotische Dreieck ungeeignet, sobald die Bedeutung eines Zeichens sowohl von der Person als auch vom sozio-kulturellen Rahmen abhängen soll, in den sie eingebettet ist. Das macht etwa Radford (2003, S. 241) deutlich, indem er über semiotische Dreiecke wie in Abbildung 1.3 aussagt: "Such semiotic triangles often isolate the subject, the object and the act of symbolizing from the other individuals and their contextual activities." Steinbring (2000) geht mit dem *epistemologischen Dreieck* einen ersten Schritt in die Richtung des Einbezugs von Aspekten ins semiotische Dreieck, die über jene Person hinausgehen, die gerade das Zeichen interpretiert. Sein semiotischer Ansatz basiert auf Arbeiten von Ferdinand de Saussure – und nicht von Charles S. Peirce. Steinbring wendet diese kommunikationstheoretischen Ideen auf mathematische Zeichensysteme an. Insbesondere betont er die Wichtigkeit des *Referenzkontexts*: Was eine Person mit einem mathematischen Zeichen verbindet, hängt auch von kontextuellen Aspekten ab und nicht nur von personalen. Somit wird die gegebene Situation wichtig und nicht nur die Person, die in dieser Situation dem Zeichen begegnet. Sinngemäß entsprechen die Ecken des epistemologischen Dreiecks jenen des semiotischen Dreiecks in Abbildung 1.3, wo der Interpretant durch den Referenzkontext ausgetauscht ist.

Seeger (2006) konstatiert einen Mangel an semiotischen Ansätzen, denen eine kulturelle Konzeption von Lernen unterliegt. Das epistemologische Dreieck von Steinbring ist ein erster Schritt in diese Richtung. Eine noch konsequentere Umsetzung dieses Programms legen in neuester Zeit sowohl Luis Radford als auch die Forschungsgruppe aus Spanien um Carmen Batanero, Vicenc Font und Juan D. Godino vor. Diese Arbeiten werden nun näher vorgestellt. Insbesondere wird dann die Bedeutung von Zeichen nicht mehr durch den Pol des Objekts im semiotischen Dreieck bestimmt (Abbildung 1.3), sondern durch die Personen, die das Zeichen gebrauchten, gebrauchen und gebrauchen werden. Das heißt, die „realistische/objektivistische Sicht“ auf die Objekte der Mathematik (Dörfler, 2010, S. 26) wird aufgehoben.

Semiotisch-pragmatische Ansätze

Was ein Zeichen für eine Person bedeutet, kann sowohl von ihr selbst als auch von den sozial verankerten Verwendungsweisen des Zeichens bestimmt sein. Entsprechende semiotische Ansätze wurden gegen Ende des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelt. Die meisten dieser Ansätze beschreiben den Umgang mit beliebigen mathematischen Zeichen und fokussieren nicht speziell auf algebraische Zeichen. Eine Ausnahme bilden die Studien von Luis Radford, die mehrheitlich den Aspekt des Verallgemeinerns unter Nutzung der algebraischen Sprache thematisieren. Daher werden im Folgenden vor allem seine Arbeiten ins Zentrum gestellt.

Ein Individuum lernt die Algebra, indem es in die mathematische Kultur der Verwendung der algebraischen Zeichen eingeführt wird. Dahinter steht bei Radford die Vorstellung, dass das Arbeiten mit algebraischen Zeichen durch eine historisch gewachsene Kultur bestimmt ist. Lernende müssen daher befähigt werden, an dieser kulturellen Praxis teilzunehmen. Diese Prämisse geht auf Wittgenstein (1974) zurück und liegt den meisten aktuellen semiotischen Ansätzen zugrunde (Arzarello et al., 2008; Font, Godino & Gallardo, 2013; Godino & Batanero, 1998, 2003; Godino, Batanero & Font, 2007; Hoffmann, 2005; Hoffmann & Roth, 2004; Radford, 2000, 2002, 2003, 2010a; Santi, 2011). Der Ansatz von Radford ist insofern umfassend, da er nicht nur den geschriebenen Zeichen eine semiotische Funktion zuerkennt, sondern allgemein allen *semiotischen Mitteln der Objektifizierung* (semiotic means of objectification, Radford, 2003, S. 41) wie Wörter, Zeichen, Gestiken, rhythmische Bewegungen. Mit diesen semiotischen Mitteln drücken Personen etwas aus und daher behandelt sie Radford in seinem Ansatz wie Zeichen. Aus diesem Grund ist die Sichtweise von Radford eine semiotische. Zudem ist es eine pragmatische Theorie, weil er die Bedeutung dieser semiotischen Mittel – nach Wittgenstein – in ihrem Gebrauch fundiert. Die semiotische Funktion versteht Radford so, dass sie beispielsweise den algebraischen Zeichen spezifische Verwendungsweisen zuordnet, in die die genannten semiotischen Mittel involviert sind. In den Handlungen respektive Tätigkeiten mit diesen semiotischen Mitteln manifestiert sich, als was die Personen die algebraischen Zeichen behandeln, wie, wann und wozu sie diese verwenden und gebrauchen. „There is a theoretical shift from what signs *represent* to what they *enable* us to do“ (Radford, 2000, S. 241). Damit grenzen sich sein Ansatz und alle andern semiotisch-pragmatischen Ansätze von der Kognitionspsychologie ab. Denn diese versteht die semiotische Funktion so, dass sie den algebraischen Zeichen interne Modelle zuordnet.

Zur Illustration sei ein Beispiel von Radford (2003) etwas genauer vorgestellt. In dieser Studie wird untersucht, wie Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 8 bis 10 die folgenden Aufgaben bearbeiteten (vgl. Abbildung 1.4):

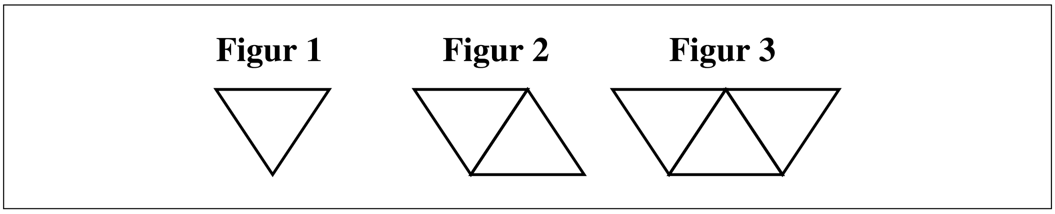

Abbildung 1.4: Mit Zahnstocher gelegte Dreiecke, die aneinander gereiht werden (nach Radford, 2003, S. 45)

a) Wie viele Zahnstocher benötigt man zur Herstellung von Figur 5? Wie viele für Figur 25?

b) Erkläre, wie du die Anzahl Zahnstocher für eine beliebige Figur finden kannst.

c) Schreibe eine mathematische Formel zur Berechnung der Anzahl Zahnstocher von Figur n auf.

Zur Bewältigung einer solchen Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler die gegebene Situation verallgemeinern. In Radford (2003, 2010b) sind drei empirisch identifizierte Typen des Verallgemeinerns vorgestellt. Diese sind als drei Typen von verallgemeinernden Aktivitäten aufzufassen. Sie drücken jeweils aus, was die entsprechenden Zeichen für die Schülerinnen und Schüler in der jeweiligen Situation bedeuten. Bei diesen drei Typen handelt es sich um die *faktische* (factual), *kontextuelle* (contextual) und *symbolische* (symbolic) Verallgemeinerung. Typische Beispiele von faktischen Verallgemeinerungen sind Aussagen wie „Es ist immer das nächste“ und „1 plus 2, 2 plus 3“ begleitet von rhythmischen Bewegungen mit der Hand bzw. mit dem Kopf. Beide Beispiele meinen je einen Abzählvorgang zur Bestimmung der Anzahl Zahnstocher der Figur 25. Die Beschreibung des jeweiligen Vorgangs orientiert sich stark am Abzählvorgang selbst und bewegt sich insofern auf der gleichen Abstraktionsstufe. Sobald die Abstraktion eine Stufe höher ist, handelt es sich um eine kontextuelle Verallgemeinerung. Hierbei meint zum Beispiel eine Wendung wie „Du addierst die Figur und dann die nächste“ mehr als einen Abzählvorgang.

Sie zeigt auf, wie man von einer beliebigen Figur die Anzahl der Zahnstocher bestimmen kann, ohne sie faktisch abzuzählen. Allerdings benutzt diese Beschreibung noch Worte, deren Bedeutung stark an den Kontext gebunden ist. Erst wenn man fähig ist, die kontextuell gebundene Vorschrift zur Bestimmung der Anzahl der Zahnstocher auf die symbolische Ebene zu transferieren, hat man eine symbolische Verallgemeinerung vor sich liegen. Diese wäre etwa durch die Angabe des algebraischen Ausdrucks $n + n + 1$ gegeben.

Insgesamt stellt Radford drei Typen von Aktivitäten dar, in die unterschiedliche semiotische Mittel der Objektifizierung involviert sind. Je nach Typ entspricht der Umgang mit den entsprechenden semiotischen Mitteln einer anderen Aktivität und damit einer anderen Bedeutung der Anzahl der Zahnstocher. Es handelt sich in diesem Sinne um drei Stufen der Algebraisierung. Sie beschreiben Aktivitäten, die ähnlich zur Abfolge der vier Stufen des Darstellens in Fischer, Hefendehl-Hebeker und Prediger (2010) sind – auch wenn diese Autorinnen nicht den theoretischen Rahmen von Radford zur Argumentation nutzen.

Radfords Beispiel zeigt, wie die Schülerinnen und Schüler zwei unterschiedliche semiotische Systeme miteinander verbinden: Einerseits geometrische Anordnungen (Abbildung 1.4), andererseits algebraische Zeichen. Das ist ein Beispiel einer *Konversion* (conversion) im Sinne von Duval (2006). Die Schülerinnen und Schüler müssen hierbei realisieren, dass zwei unterschiedliche Darstellungen ein und dasselbe mathematische Objekt meinen (im obigen Fall: die Anzahl Zahnstocher). Genau zur Erklärung solch anspruchsvoller Übersetzungsprozesse sind solch semiotisch-pragmatische Modelle entwickelt worden. Konsequenterweise wurden sie bislang eher selten in Fällen wie dem kalkülorientierten Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen angewendet, wo es um *Handhabungen* (treatments, ebd.) geht, also um Transformationen innerhalb desselben semiotischen Systems, nämlich des algebraischen Zeichensystems.

Die Rolle der Semiotik in dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit folgt semiotisch-pragmatischen Ansätzen. Die semiotische Funktion ist wichtig, da es um die Lesarten eines algebraischen Ausdrucks geht: Wie interpretiert eine Person die Zeichen in einem algebraischen Ausdruck? Welche Verbindungen zwischen den Zeichen stellt sie her, damit der Ausdruck für sie Sinn macht, damit sie Umformungen daraus folgern kann? Die pragmatische Sichtweise wird eingenommen, da das Erkennen von Umformungen als Zuweisen von Bedeutung konzipiert wird. Das Strukturieren ist die Art und Weise, wie eine Person sich die Bedeutung eines Ausdrucks erarbeitet.

Konsequenterweise wird weniger mit dem Konzept des semiotischen Dreiecks, des epistemologischen Dreiecks, der ikonischen, indexikalischen und symbolischen Sichtweise argumentiert. Vielmehr werden pragmatische Begrifflichkeiten wichtig, etwa implizite Normen und soziale Praktiken. Diese werden im Kapitel 2 eingeführt.

1.2.7 Fazit

Der dargestellte Überblick offenbart jene Sichtweisen, die bislang schwerpunktmäßig an das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen herangetragen wurden. Sie werden nun hinsichtlich ihrer Relevanz für die vorgelegte Arbeit resümiert:

1. Mit dem Assoziationismus (Abschnitt 1.2.1) und den Prozess-Modellen (Abschnitt 1.2.3) sind Sichtweisen vorgestellt, bei denen das Erkennen von Umformungen einzig durch typische Merkmale des vorgelegten algebraischen Ausdrucks bestimmt ist. Den Merkmalen sind entsprechende Umformungen zugeordnet. Diese Perspektive wird in dieser Arbeit nicht eingenommen. Denn es wird davon ausgegangen, dass auch die Verbindungen zwischen den einzelnen Merkmalen (respektive der Zeichen) wichtig sind und nicht allein die einzelnen Merkmale (respektive Zeichen). Entsprechend wird das Erkennen einer Umformung als Prozess des Strukturierens begriffen und nicht allein als Detektieren eines spezifischen Merkmals.

2. Mit der Gestaltpsychologie (Abschnitt 1.2.2) und dem Begriff der algebraischen Struktur (Abschnitt 1.2.4) sind Sichtweisen vorgestellt, bei denen eine Umformung aufgrund der Struktur des algebraischen Ausdrucks erkannt wird – und nicht allein aufgrund eines Merkmals. Damit werden Verbindungen zwischen den Zeichen eines algebraischen Ausdrucks wichtig. Die vorgelegte Arbeit folgt diesem Ansatz. Sie geht aber darüber hinaus, indem sie den Begriff der Struktur individualisiert.

3. Die Struktur wird in der bestehenden mathematikdidaktischen Literatur als Eigenschaft des Ausdrucks begriffen und unabhängig von der Person, die gerade strukturiert, konzipiert (Abschnitte 1.2.2 und 1.2.4). Ein solcher Begriff der Struktur gehört zur Theorie der Mathematik, mit ihm wird ein mathematischer Sachverhalt ausgedrückt. Zur Beschreibung individueller Denkprozesse ist aber ein Begriff aus der Praxis der Mathematik nützlicher. Insbesondere ist die Struktur eines algebraischen Ausdrucks als abhängig von personalen Bedingungen zu begreifen. Das wird in Kapitel 2 zur Struktur*ierung* eines algebraischen Ausdrucks führen. Eine wesentliche Aufgabe dieser Arbeit ist die Entwicklung und Fun-

dierung dieses Begriffs. Insbesondere wird zu klären sein, wie personale Bedingungen eine hergestellte Strukturierung prägen.

Sowohl mit dem semiotischen als auch dem epistemologischen Dreieck (Abschnitt 1.2.6) sind Sichtweisen vorgestellt, welche den Einbezug von personalen Aspekten beim Strukturieren vorsehen. Auch unterschiedliche Stufen eines Strukturblicks (Abschnitt 1.2.5) betonen die personale Bedingtheit des Strukturierens. Wegen dem nun folgenden vierten Punkt nimmt die vorgelegte Arbeit aber eine andere Sichtweise ein.

4. Die Struktur eines algebraischen Ausdrucks wird nicht nur als abhängig vom Ausdruck und vom Individuum konzipiert, sondern auch vom Kontext. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit semiotisch-pragmatische Sichtweisen wichtig, wie sie in Abschnitt 1.2.6 dargestellt sind. Die in Kapitel 2 zu definierende Strukturierung eines Ausdrucks wird also eine Funktion des Ausdrucks, der strukturierenden Person und des Kontexts sein. Die zu entwickelnde Theorie muss daher die Abhängigkeit von diesen Einflussfaktoren (er)klären können.

Der Überblick führt zur Formulierung erster Festlegungen, die aufgrund der referierten Literatur als plausibel erscheinen. Damit wird auch deutlich, inwiefern die vorgelegte Arbeit bestehende Arbeiten nutzt und ergänzt. Hervorzuheben ist hierbei vor allem, dass Strukturieren offenbar ein Prozess ist. Die Forschung im Umfeld der Prozess-Modelle (Abschnitt 1.2.3) belegt eindrücklich, dass algebraisches Umformen als Problemlösen aufgefasst werden kann. Dem Erkennen einer Umformung geht eine Analyse voraus. Diese schließt eine Untersuchung des vorgelegten algebraischen Ausdrucks ein, insbesondere auch Konsequenzen, die sich aus verworfenen Umformungen des Ausdrucks ergeben. Entsprechend wird in den folgenden Kapiteln auch das Vornehmen von Strukturierungen als Prozess begriffen werden, bei dem analysiert wird, wie die einzelnen Zeichen in einen Zusammenhang gebracht werden können. Dem semiotisch-pragmatischen Ansatz folgend werden insbesondere Handlungen angegeben, die Teil dieses Strukturierungsprozesses sind, in denen sich also das Strukturieren manifestiert und somit der Beobachtung zugänglich wird.

Eine zentrale Frage wird sein, welche Rolle bei diesem Prozess des Strukturierens die Verfahren spielen. Einerseits betonen Thorndike et al. (1926) die Wichtigkeit von Verfahren beim algebraischen Umformen (Abschnitt 1.2.1). Verfahren können das Strukturieren der algebraischen Ausdrücke bestimmen, indem ein Ausdruck so strukturiert wird, dass das Verfahren ausgeführt werden kann. Andererseits liegt für die Gestaltpsychologie das Wesentliche in den inneren Beziehungen eines Ausdrucks, Verfahren sind vorerst sekundär (Abschnitt 1.2.2). Durch das (Um)Strukturieren wird der Beitrag der Teile des algebraischen Ausdrucks für das Ganze sichtbar. Erst aus solchen Bezügen generieren sich dann Umformungen. Diese scheinbare Dichotomie wird in dieser Arbeit als Unterscheidung zweier Lesarten des Ausdrucks interpretiert werden. Die eine dient der Ausführung von Verfahren, die andere deren Bildung.

Strukturieren als Prozess zu verstehen, wird das eine sein. Das andere wird sein, was bei diesem Prozess mit „Strukturieren“ gemeint sein kann. Dazu wird in Anlehnung an gestaltpsychologische Ideen in Kapitel 2 Strukturieren als ein Aufeinanderbeziehen von Teilen eines algebraischen Ausdrucks definiert werden. So wird deutlich werden, dass eine Person, die gerade strukturiert, die einzelnen Zeichen eines Ausdrucks miteinander zu verbinden (ver)sucht. Dabei legen die mathematikdidaktischen Arbeiten der letzten Jahrzehnte zum Strukturieren algebraischer Ausdrücke vielerlei Aspekte nahe, die beim Herstellen solcher Verbindungen eine Rolle spielen werden: Wie werden die dargestellten Operationen behandelt? In welche Teile wird der Ausdruck aufgeteilt? Welche Eigenschaften der Teile werden wie genutzt? Welche Verfahren sind wichtig und wie leiten sie das Strukturieren? Die Beantwortung solcher Fragen wird mit den empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) zu verfolgen sein.

Die theoretische Sichtweise der vorgelegten Arbeit wird eine semiotisch-pragmatische sein (Abschnitt 1.2.6). Daher wird in Kapitel 2 der Prozess des Strukturierens wie folgt konzipiert werden: Eine Person, die einen Ausdruck strukturiert, verbindet durch diesen Prozess die Zeichen so, dass der Ausdruck für sie etwas *bedeutet*. Allerdings wurden bislang die entsprechenden semiotisch-pragmatischen Theorien vor allem zur Untersuchung von Konversionen, also Übergängen zwischen verschiedenen Darstellungssystemen genutzt. Die vorgelegte Arbeit will daher aufzeigen, wie sich die entsprechenden Ansätze auf die Beschreibung von Umformungen innerhalb desselben Darstellungssystems, nämlich des algebraischen, übertragen lassen.

2 Entwicklung der Theorie

In diesem Kapitel wird eine Theorie der Strukturierung eines Terms respektive einer Gleichung entwickelt. Dabei wird eine semiotisch-pragmatische Sichtweise eingenommen. Strukturieren wird daher als Handeln begriffen werden und es wird sich in diesem Handeln die Bedeutung des Terms respektive der Gleichung manifestieren. Die Wahl dieser Sichtweise soll nun gleich zu Beginn begründet werden. Drei Punkte sind ausschlaggebend:

1. Die Leitfrage der vorgelegten Arbeit ist: Wie erkennen Personen in algebraischen Ausdrücken Umformungen? Die Untersuchung dieser Frage beginnt ganz am Anfang, beim algebraischen Ausdruck. Dieser liegt in der Form einer Zeichenreihe vor. Dörfler (2006a, S. 210) spricht beispielsweise von einer „Inskription", Brunner (2013) erinnert daran, dass es sich hierbei um ein *Token* (und vorerst nicht um einen *Typ*) handelt. Auf dem Papier ist etwas Geschriebenes vermerkt, also etwas Materielles und nicht etwa eine abstrakte Entität. Bei diesen Zeichen wird begonnen. Was macht eine Person mit ihnen? Was fällt ihr auf? Worauf achtet sie? Was kommt einer Person beim Betrachten dieser Zeichen in den Sinn? Wozu veranlassen die Zeichen die Person? Das sind semiotische Fragen. Denn im Zentrum steht das (externe) Zeichen und nicht etwa seine interne Repräsentation. Entsprechend folgt die vorgelegte Arbeit einem semiotischen Ansatz und zwar einem semiotisch-pragmatischen, wie sich aus Punkt 2 ergibt. Allgemein werden semiotische Fragen in der Mathematikdidaktik seit etwa 1980 breit diskutiert (Hasemann, Hefendehl-Hebeker & Weigand, 2006; Hoffmann 2005; Kadunz, 2010; Sáenz-Ludlow, Presmeg, 2006).

2. Die empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) sollen beschreiben, wie die Personen mit den algebraischen Zeichen handeln, während sie sich einen Reim auf die Zeichenreihe machen. Es soll erhoben werden, wie Personen die einzelnen Zeichen des algebraischen Ausdrucks beim Strukturieren gebrauchen. Es geht also um den Zusammenhang zwischen den Zeichen und den Handlungen, die ihr Verstehen ermöglichen. Daher bietet sich eine Sichtweise an, welche solche Handlungen mit Zeichen respektive Handhabungen von Zeichen als basale Elemente und nicht bloß als Begleit- oder Folgeerscheinung anderer Elemente postuliert. Die semiotisch-pragmatische Sichtweise erfüllt diesen Anspruch.

Die Verwendung einer pragmatischen Sichtweise ist in der Mathematikdidaktik nicht neu. Semiotische Betrachtungen (Godino & Batanero, 1998; Meyer, 2010; Radford 2000) sowie diskursive Studien (Krummheuer, 1995; Sfard, 2008; Voigt, 1984) basieren auf einem pragmatischen Bedeutungsbegriff. Epple (1994) gibt zudem eine Übersicht über die Verwendung eines pragmatischen Bedeutungskonzepts in philosophisch orientierten Untersuchungen zur Mathematik(didaktik).

3. Diese Arbeit soll eine Grundlage für die Entwicklung von fundierten Ideen und Hilfestellungen für den Algebraunterricht sein, das heißt, vor lauter Zeichen und Handlungen soll der Unterricht nicht vergessen werden. Und Mittelpunkt jeglichen Unterrichts ist die Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden. Aus diesem Grund folgt die vorgelegte Arbeit einer Sichtweise, die sich für die Untersuchung der Forschungsfrage *und* die Erklärung von Kommunikationsprozessen eignet. Die semiotisch-pragmatische Sichtweise leistet das. Denn sie bezieht die *soziale Dimension* (Brandom, 2000) der Kommunikation mit ein, respektive schafft eine Art *geteilte Intentionalität* (shared intentionality, Tomasello et al., 2005): Eine Person kann nur darum mit einer anderen kommunizieren, weil sie dieser dieselbe Art von Intentionalität zuweist, wie sie selbst besitzt.

Ein Kommentar sei hier erlaubt. Jede Wahl der theoretischen Sichtweise ist nebst Gründen der Angemessenheit immer auch bestimmt durch die Personen, welche die Forschung konzipieren, durch ihre Vorlieben, Erfahrungen und biografischen Stationen sowie durch den Kontext, in dem sich diese Personen befinden (Feyerabend, 1976). So bin beispielsweise ich in meinem wissenschaftlichen Werdegang stark konfrontiert worden mit Literatur zur analytischen Philosophie und Sprachpragmatik etwa im Rahmen der Fundierung des Dialogischen Lernens. Zweitens sind semiotisch-pragmatische Studien aktuell in der Mathematikdidaktik maßgeblich an der Fundierung des Umgangs mit Zeichen beteiligt. Meines Erachtens haben auch diese personalen und kontextuellen Bedingungen zur Wahl der theoretischen Sichtweise beigetragen.

2.1 Regeln und ihre Anwendung

Das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen kann als Schlussfolgern in einem Kalkül begriffen und somit mathematisch formalisiert werden. Ein solcher Kalkül legt zweierlei fest. Erstens definiert er, was als algebraischer Ausdruck gilt und was nicht. Zweitens bestimmt er, welche Umformungen erlaubt sind und welche nicht. In diesem Sinne regelt er die Korrektheit der

Darstellung und ihrer Umformungen. Genau das charakterisiert die Mathematik: Was korrekt oder inkorrekt ist, kann mittels einem Kalkül bestimmt werden. Ein Beispiel eines algebraischen Kalküls wird unten im Abschnitt 2.1.1 gegeben.

Der Abschnitt 2.1.2 wird dann aufzeigen, dass dieser Kalkül die Korrektheit festlegt, nicht aber, wann welche Regel angewendet werden soll. Das heißt, die Frage nach der Anwendung der Regeln lässt sich nicht durch Angabe eines Kalküls beantworten. Ganz allgemein fallen in der Mathematik Fragen nach der Heuristik, nach Gütekriterien gelungener Definitionen oder gar danach, was als „trivial" gilt, außerhalb jeglichen Kalküls. Solche Fragen können nicht wiederum durch Angabe eines endlichen Sets von weiteren Regeln explizit geregelt werden. Vielmehr sind solche Fragen durch implizite Normen bestimmt. Dabei sind mit „impliziten Normen" die Gepflogenheiten respektive stillschweigenden Regelhaftigkeiten gemeint, die den Praktiken der Mathematikerinnen und Mathematiker innewohnen. Indem die vorgelegte Arbeit das mathematische Arbeiten als solch implizit normative Praxis begreift, folgt sie Arbeiten wie etwa Bauersfeld (1983), Brandom (2000), Ernest (1998), Godino und Batanero (1998), Lerman (2001), Radford (2000), Sfard (2008), Wittgenstein (1974).

2.1.1 Ein algebraischer Kalkül

Ein algebraischer Kalkül besteht aus einem Alphabet, Regeln für den Aufbau von algebraischen Ausdrücken, Regeln für ihre Darstellung sowie Regeln für das Umformen von algebraischen Ausdrücken.

Das *Alphabet* des algebraischen Kalküls ist gleich der Menge von Symbolen, mit denen Terme und Gleichungen formuliert werden dürfen. Es umfasst Variablen, Operationszeichen, das Gleichheitszeichen und auch Klammersymbole. Die *Regeln für den Aufbau algebraischer Ausdrücke* legen fest, wie Terme und Gleichungen gebildet werden können. Diese Regeln werden typischerweise in der Form von induktiven Definitionen gegeben. Zum Beispiel ist $(A + B)$ ein Term, wenn A und B Terme sind. Die Gleichungen sind schlicht als $A = B$ definiert, wenn A und B Terme sind.

Mit dem Alphabet und den Regeln für den Aufbau ist formal festgelegt, welche Zeichenreihe ein algebraischer Ausdruck ist und welche nicht. Insbesondere ist auch die Darstellung, also die Schreibweise, festgelegt. Beispielsweise wird $(2 + x)$ geschrieben und nicht $+(2, x)$. Oder ein Symbol für eine zweistellige Operation wird typischerweise zwischen und nicht – wie etwa in der Analysis üblich – vor seinen Argumenten geschrieben. Oftmals kommen aber *Regeln für die Darstellung algebraischer Ausdrücke* hinzu, die eine schlankere Schreibweise ermöglichen. Ein zentrales Beispiel ist die Hierarchie der Operationen, die das Weglassen vieler Klammern erlaubt. Statt $(2+(x+y))$ kann dann $2+x+y$

und statt $(2 + (x \cdot y))$ kann $2 + x \cdot y$ geschrieben werden. Ein anderes Beispiel ist das Weglassen des Multiplikationszeichens, was schließlich für $2 + x \cdot y$ die Schreibweise $2 + xy$ erlaubt.

Es gibt unterschiedliche algebraische Kalküle, darauf soll hier hingewiesen werden. Typischerweise unterscheiden sich diese nur in der Darstellung der Ausdrücke. Obig eingeführter Kalkül liefert die Schreibweise der Schulalgebra. Möglich wären aber auch funktionale Schreibweisen oder Baumdiagramme, wie in Abbildung 2.1 gezeigt ist. Gerade der Vergleich dieser drei Darstellun-

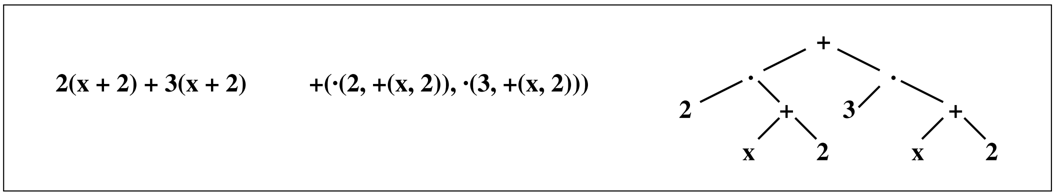

Abbildung 2.1: Drei unterschiedliche Darstellungen desselben Terms: Standardschreibweise, funktionale Schreibweise, Baumdiagramm.

gen desselben Terms belegt, wie Regeln für den Aufbau von Termen immer auch deren Darstellung bestimmen.

Schließlich sind *Regeln für das Umformen algebraischer Ausdrücke* formuliert. Damit sind Regeln für Äquivalenzumformungen von Gleichungen gemeint, aber auch Rechengesetze wie Kommutativ-, Assoziativ- oder Distributivgesetz. Durch solche Regeln ist festgelegt, welche Umformungen korrekt und welche nicht korrekt sind. Zu beachten ist, dass Rechengesetze als Gleichungen dargestellt sind. In diesem Sinne bestimmt der jeweilige algebraische Kalkül auch die Schreibweise seiner algebraischen Gesetze.

2.1.2 Implizite Normen

Obige im Abschnitt 2.1.1 vorgestellte Regeln bestimmen, ob ein algebraischer Ausdruck korrekt aufgebaut ist und ob er korrekt umgeformt wurde. Sie liegen in einem solchen Sinne explizit vor, dass sie im Prinzip eine maschinelle Überprüfung der Korrektheit ihrer Anwendung ermöglichen. Solche Normen werden hier als *Regeln* bezeichnet. Die meisten Normen der Mathematik können nun aber nicht in diesem Sinne als Regeln vollständig explizit gemacht werden (Brandom, 2000; Breger, 1990, 1992; Rüede, 2009). Brandom (2000) spricht dann von *impliziten Normen* oder von praktischen Richtigkeiten, Sfard (2001, 2008) von *Metaregeln* (metarules). Implizite Normen sind also jene Normen, die nicht vollständig – sondern nur teilweise – explizit gemacht werden können.

Diese impliziten Normen regeln das mathematische Arbeiten. Das umfasst erstens die Frage nach der situativ angemessenen Anwendung von Regeln zur

Bearbeitung von Problemstellungen wie etwa das Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen. Hier sind auch Fragen der Verfahrensausführung und Heuristik angesprochen. Zweitens umfasst das mathematische Arbeiten auch Fragen wie jene nach der Ästhetik von Beweisen oder jene nach der Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit von Definitionen und mathematischen Strukturen (Breger, 1990, 1992; Heintz, 2000), das heißt, die impliziten Normen sind jene Regelhaftigkeiten, denen ein Mathematiker folgt, wenn er mathematisch angemessen handelt. In diesem Sinn ist das mathematische Arbeiten im Impliziten fundiert. Insbesondere fundiert das Implizite das Explizite und nicht umgekehrt, das heißt: Das „Wissen, dass" wird in Begriffen des „Wissen, wie" erklärt. Zur Vermeidung von Missverständnissen sind zwei Punke zu betonen, die mit diesem Sachverhalt in Zusammenhang stehen. Erstens wird der Begriff der impliziten „Norm" in semiotisch-pragmatischen Sichtweisen nicht im Sinne einer Vorschrift, also nicht im Sinne einer schriftlich vorliegenden Handlungsanweisung benutzt. Denn dann könnten die impliziten Normen ja vollständig explizit gemacht werden. Gerade das ist nicht der Fall. Zweitens ist eine Regel bloß der verbale Ausdruck einer impliziten Norm. Diese war vor der Regel. Insofern erklärt die Regel nicht etwas, sondern sie drückt etwas aus. Das hat beispielsweise auch Auswirkungen darauf, was es heißt, ob eine Regel wahr ist oder nicht (Brandom, 2000).

Die impliziten Normen bestimmen also die Anwendung einer algebraischen Regel in dem Sinne, dass sie (implizit!) festlegen, *wann* eine Regel *wie* angewendet werden soll. Diese Festlegungen sind ja den obigen Regeln des algebraischen Kalküls nicht mitgegeben. Sie stecken aber implizit im mathematischen Arbeiten. Es ist gerade Gegenstand des Algebraunterrichts, zu lernen, wann diese Regeln wie anzuwenden sind. Dabei ist mit dem Wie der Anwendung die Frage der korrekten Anwendung gemeint: Wie wende ich die Regel korrekt an? In welchen Situationen darf ich sie überhaupt anwenden? (Um ganz präzis zu sein: Explizit ist im algebraischen Kalkül geregelt, ob eine Regel korrekt angewendet wurde. Implizit ist geregelt, wie ich die Regel gebrauchen muss, wie ich mit ihr umzugehen habe, damit ich sie korrekt – nämlich so, wie es gemeint ist – anwende.) Das Wann der Anwendung zielt hingegen auf das Strategische, auf die Heuristik: Wann ist die Anwendung der Regel nützlich? Wann bringt sie einen Gewinn und wann nicht? Beispielsweise kann die Regel korrekt angewendet sein, doch die Anwendung verkompliziert die Aufgabe bloß. Zur Illustration seien zwei Beispiele gegeben.

1. Eine Regel für die Darstellung algebraischer Ausdrücke lautet: Bei $a \cdot b$ kann das Malzeichen weggelassen und ab geschrieben werden.

   Das Wie der Anwendung: Typischerweise wird bei dieser Regel nicht gesagt, wie sie in Kombinationen wie $a : b \cdot c$ zu verwenden ist: nämlich gar nicht. Denn $a : b \cdot c$ und $a : bc$ meinen Unterschiedliches. $a : b \cdot c$

ist gleich $(a : b) \cdot c$ und $a : bc$ gleich $a : (b \cdot c)$. Ebenso wird nicht auf einen Fall wie $10 \cdot \frac{1}{2}$ hingewiesen und daher verstehen manche Lernende anfänglich unter $10\frac{1}{2}$ und $10 \cdot \frac{1}{2}$ dasselbe.

Das Wann der Anwendung: Ein sichtbares Multiplikationszeichen kann gemeinsame Faktoren betonen. Dafür müssen die Schülerinnen und Schüler ein Gefühl entwickeln. Muss beispielsweise ein Term wie $cab+aca$ ausgeklammert werden, ist ein explizites Multiplikationszeichen hilfreich, weil es den gemeinsamen Faktor betont: $ca \cdot b + a \cdot ca$.

2. Ein Rechengesetz für das Umformen algebraischer Ausdrücke lautet: $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz).

   Das Wie der Anwendung: Selten wird gesagt, dass hier das Pluszeichen wesentlich ist. Daher findet man während des Lernprozesses auch inkorrekte Umformungen wie von $a(b \cdot c)$ zu $ab \cdot ac$. Unklar ist zu Beginn auch die Anwendung in Fällen wie $b(a + b + c)$ oder $(2 + x)(1 - x)$.

   Das Wann der Anwendung: Bei einer linearen Gleichung wie $7(16+3x) = 100-3(16+3x)$ ist die Anwendung des Distributivgesetzes unangemessen (aber korrekt), um auf $112+21x = 100-48-9x$ umzuformen. Wesentlich geeigneter ist es, zuerst auf $10(16 + 3x) = 100$ umzuformen und dann das Distributivgesetz anzuwenden.

Selbstverständlich kann in obigen Situationen so reagiert werden, dass die entsprechenden Regeln detaillierter – und damit expliziter – angegeben werden. Doch erstens müssen auch diese Ergänzungen von den Lernenden verstanden werden und zweitens lassen sich mühelos weitere Fälle konstruieren, in denen die Anwendung weiter geklärt werden muss. Die Anwendung einer Regel ist einfach nicht mit endlich vielen Worten – und daher nicht explizit – für die unendlich vielen Anwendungssituationen zu regeln.

2.1.3 Soziale Normen

Implizite Normen haben eine soziale Dimension (Brandom, 2000; Wittgenstein, 1984). Sie legen fest, wie wir das Gegenüber zu behandeln haben, damit wir seine Aussagen angemessen begreifen können. Wir müssen es nämlich so behandeln, wie es uns behandelt. Kommunikation gelingt nur dann, wenn jede Person die andere als intentionales Wesen versteht und so einen Raum von geteilter Intentionalität schafft. Daher sind die impliziten Normen immer auch soziale Normen, da sie die gegenseitige Behandlungsweise bei Kommunikationsprozessen festlegen und damit die Art und Weise der gegenseitigen respektive interaktiven Wahrnehmungs-, Interpretations- und Verstehensprozesse.

Diese soziale Dimension wird unterschiedlich konzipiert. Allen Ansätzen ist aber gemeinsam, dass das Soziale das Individuelle konstituiert und nicht umgekehrt. Seeger (2006, S. 269) spricht hier von einer Entwicklung, „die vom Sozialen zum Individuellen verläuft", und bei Brandom (2000) ermöglicht erst das Erkennen des Du die Konstitution des Ich. Das führt zur Konzeption des Lernens als *Teilnahme* an einer Kultur (Sfard, 1998), etwa als Teilnahme am „sozial geteilten/teilbaren [diagrammatischen] Handeln" (Dörfler, 2010, S. 27) oder als Teilnahme an einer diskursiven Praxis (Sfard, 2008) – und nicht als Erwerb von sprachlichen Fähigkeiten. Wo Sfard Akte des Sprechens hervorhebt, berücksichtigt Radford (1998, 2000) auch das Schreiben sowie Gestiken und Bewegungen mit dem Körper oder ganz allgemein jegliche Formen der Handlungen mit Zeichen. Dieser umfassende Begriff von Zeichen und ihrem Umgang macht plausibel, warum Radford die soziale Dimension als eine sozio-kulturelle konzipiert: Die entsprechenden Normen sind im Laufe der Kulturgeschichte gewachsen. Beispielsweise wird das Erlernen der Anwendung der algebraischen Regeln eine Einführung der Lernenden in eine historisch gewachsene Kultur. Die durch diese Kultur benutzten algebraischen Zeichen haben zweierlei Funktionen. Einerseits erlauben sie dem Individuum, sich in die algebraische Praxis einzubringen, andererseits konstituieren die Verwendungsweisen der algebraischen Zeichen eine soziale Realität. So ist wohl Radford (2000, S. 241) zu verstehen, wenn er festhält, dass die Regeln das Individuum „transzendieren".

Erst die soziale Dimension der Normen macht die Anwendung von Regeln überhaupt erlernbar. Denn diese Anwendung von Regeln kann nicht vollständig explizit gemacht werden und folglich müssen sich die Lernenden an etwas anderem als an Regeln orientieren, die beispielsweise schriftlich notiert sind. Das Kollektiv der Mathematiker liefert diese Orientierung. Die Lernenden werden durch die Lehrperson in Praktiken dieses Kollektivs eingeführt. Als Vertreter dieses Kollektivs schätzt die Lehrperson ein, inwiefern eine Regel von den Lernenden angemessen verwendet wird. So lernt man die Anwendung der Regeln, das heißt, das Kollektiv ist das Korrektiv bei der Anwendung der Regeln.

2.2 Strukturieren und Strukturierungen

In diesem Abschnitt wird der Schritt von der Struktur zur Strukturierung vollzogen. Damit ändert sich die Sichtweise: weg von der (objektiven) Eigenschaft eines algebraischen Ausdrucks, hin zur subjektiven Begegnung mit dem Ausdruck. Die Mathematikdidaktik hat solche Individualisierungen mathematischer Begriffe schon mehrfach betont. Es sei auf ein paar Beispiele hingewiesen.

– Im deutschsprachigen Raum stellt Bauersfeld (1983) als einer der Ersten die individuellen Lernwege ins Zentrum. Er führt die *subjektiven Erfahrungsbereiche* ein zur Modellierung der individuellen Verarbeitung menschlicher Erfahrung. Diese umfassen „die Gesamtheit des als subjektiv wichtigen Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw., also nicht nur die kognitive Dimension“ (ebd., S. 2).

– Seit etwa 1980 interessieren sich viele empirische Studien für individuelle Sichtweisen auf mathematische Begriffe. Beispielsweise zeichnet Hussmann (2002) nach, wie Schülerinnen und Schüler den Begriff des Integrals individuell entwickeln. Rottmann (2006) erfasst das individuelle kindliche Verständnis von „die Hälfte“ und „das Doppelte“, um daraus Idealtypen zu bilden. Selter und Spiegel (1997) dokumentieren individuelle Rechenwege von Kindern und Söbbeke (2005) beschreibt unterschiedliche Ebenen der Strukturierungen von Punktfeldern, indem sie Einzelfälle darstellt.

– Besonders hinsichtlich des Unterrichts sind individuelle Denkprozesse wichtig. Entsprechend macht die Mathematikdidaktik Vorschläge, wie diese im Unterricht genutzt werden sollen. Ein allgemeines Unterrichtskonzept stellt zum Beispiel das Dialogische Lernmodell dar (Gallin & Hussmann, 2006; Ruf & Gallin, 1998). Vorschläge zur Aktivierung und Nutzung individueller Vorstellungen sind in Lengnink, Prediger und Weber (2011) gegeben und ein ganz spezifisches Unterrichtsinstrument ist beispielsweise in Weber (2007, 2010) beschrieben: mathematische Vorstellungsübungen. Spezifisch auf einen thematischen Bereich zugeschnittene Umsetzungsideen sind etwa für die Arithmetik in Selter (1994) entwickelt und für die frühe geometrische Förderung in Wollring (2006).

– Zur Beschreibung des Individuellen sind andere Begrifflichkeiten nötig als zur Beschreibung von Regularitäten. Einen aktuellen Ansatz legt Schacht (2012) vor. Er führt das Instrument der individuell eingegangenen *Festlegungen* ein. Die individuelle Begriffsentwicklung wird dann zur individuellen Festlegungsentwicklung. Damit kann die Spannung zwischen der individuellen Welt und dem normativen Status begrifflich gefasst werden.

Im Folgenden wird nun die Individualisierung des Begriffs der Struktur zum Begriff der Strukturierung beschrieben. Ausgangspunkt wird sein, dass der Prozess des Strukturierens eine Tätigkeit und Strukturieren somit ein Handeln ist.

2.2.1 Definition einer Strukturierung

Der Mensch muss extern Gegebenes interpretieren. Er ist eben keine Maschine. Dabei ist mit „Interpretieren" in dieser Arbeit ein „Behandeln als" gemeint. Dadurch wird die semiotisch-pragmatische Sichtweise hervorgehoben. Es wird wichtig, zu welchen Handlungen die Personen durch die Zeichen befähigt, und nicht, wie die Zeichen von den Personen intern repräsentiert werden (Dörfler, 2006a, 2006b; Radford, 2000). Der Mensch muss also lernen, als was etwa ein zu vereinfachender Term oder eine zu lösende Gleichung zu behandeln ist. Er muss lernen, Terme und Gleichungen zu strukturieren, um gewinnbringende Umformungen zu erkennen und anzuwenden. Diese Weise des „Behandeln als" wird nun als *Strukturieren* verstanden. Es ist in dieser Arbeit bestimmt als ein Aufeinanderbeziehen von Teilen eines algebraischen Ausdrucks durch eine Person und ist damit ähnlich konzipiert wie in gestaltpsychologischen Sichtweisen (Abschnitt 1.2.2). In der Folge wird auch vom Herstellen von Bezügen zwischen Teilen eines Ausdrucks gesprochen. Eine *Strukturierung* ist dann als das Produkt dieses Prozesses definiert. Sie besagt, welche Teile eines Ausdrucks wie aufeinander bezogen sind.

Wichtig an der Definition des Strukturierens und der Strukturierung ist die Anbindung an eine Person. Es ist eine Person, die strukturiert und dadurch eine Strukturierung herstellt. So kann die Individualität der strukturierenden Tätigkeit einer Person eingefangen werden.

In den folgenden Kapiteln werden mehrere Strukturierungen vorgestellt. Daher sei an dieser Stelle nur ein Beispiel zur Illustration angeführt, und zwar jenes der Vereinfachung von $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$. Vorstellbar ist beispielsweise eine erste Person, die den Ausdruck aufteilt in je einen Teil links und rechts des Minuszeichens und ihn in der Folge als Differenz behandelt. In diesem Fall bezieht die Person $\frac{2x}{2x-2}$ und $2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ so aufeinander, dass sie den ersten Teil als Minuenden und den zweiten als Subtrahenden einer Subtraktion begreift. Das wäre die von der Person vorgenommene Strukturierung. Vielleicht versucht die Person in der Folge sogar die beiden Teile einander anzugleichen, um einen Ausdruck der Form $A - A$ zu erhalten. Denkbar ist eine zweite Person, die die zweidimensionale Anordnung in Teile unterhalb und oberhalb des Bruchstrichs aufteilt (ausgenommen der Vorfaktor 2), die beiden Nenner aufeinander bezieht und erkennt, dass es dieselben sind. Eine mögliche Strukturierung bestände darin, dass die Person die Teile unterhalb des Bruchstrichs je als Hauptnenner von zwei zu subtrahierenden Brüchen behandelt. Eine Konsequenz wäre, dass die Person dann den Vorfaktor 2 zum x hochnimmt und den Bruchstrich mental durchzieht. Schließlich könnte eine dritte Person nur auf den ersten Bruch fokussieren und diesen in einen Teil oben ($2x$) und zwei Teile unten ($2x$ und 2) aufteilen. Diese drei Teile würden dann nahezu wie drei Ecken eines Dreiecks erscheinen. Indem die Person diese drei Teile aufeinander bezieht, erkennt sie vielleicht den gemeinsamen Faktor 2. Darin bestände der Kern dieser dritten Strukturierung.

Diese drei Beispiele stellen jeweils genau eine Strukturierung vor, hergestellt von einer Person. Es soll aber betont werden, dass im Laufe des Vereinfachens eines Terms oder des Lösens einer Gleichung mehrere Strukturierungen nacheinander hergestellt werden. Schon vor der ersten Umformung stellt eine Person oftmals mehr als eine Strukturierung her, wie die Beispiele in den Kapiteln 4 und 5 zeigen werden.

2.2.2 Beobachtbarkeit des Strukturierens

Eine Person, die strukturiert, handelt. Das ist der wesentliche Grund, warum in dieser Arbeit Strukturieren gleich dem Aufeinanderbeziehen von Teilen des Ausdrucks gesetzt wird. Denn, wer Teile in einem Ausdruck aufeinander bezieht, stellt Bezüge her und handelt in diesem Sinne. Diese Konzeption des Strukturierens als Handeln geht einher mit dem Ansatz von Radford (1998, 2000), der ganz allgemein das Denken als reflexive Tätigkeit (reflexive activity) konzipiert. Die Grundlage für diesen tätigkeitstheoretischen Ansatz von Radford ist die Arbeit von Leontiev (1981).

Sind solche Handlungen des Strukturierens beobachtbar? – Die Antwort fällt mehrheitlich negativ aus. Wenn eine Person still und regungslos einen algebraischen Ausdruck anschaut und ihn dabei strukturiert, ist von außen wenig zu beobachten. Allerdings kann das Strukturieren der Beobachtung und somit der Empirie zugänglich gemacht werden. Das wird einerseits für die Methode wichtig (Kapitel 3), andererseits aber auch unterrichtsrelevant (Kapitel 7). Drei Beispiele, wo und wie sich Strukturieren in beobachtbaren Handlungen manifestiert, seien nun genannt.

Selbstbericht

Eine Person kann darüber berichten, worauf sie gerade schaut und welche Teile des Ausdrucks sie aufeinander bezieht. Vergleicht sie dabei die linke Seite mit der rechten? Schaut sie horizontal, vertikal oder diagonal? Spricht sie von Vorfaktoren oder darüber, was vorne und hinten steht? – In solchen Aussagen drückt eine Person unter anderem aus, welche Geometrie (Fischer, 1984) respektive Form (Bergsten, 1999; Byers & Erlwanger, 1984) sie dem Ausdruck zuweist, welche Anwendungen von Rechengesetzen sie darin erkennt oder auch welche Eigenschaften ihr bei gewissen Teilen auffallen.

Eine Fremdperspektive erfahren

Eine Person kann erfahren, wie jemand anders (beispielsweise eine Lehrperson) ihre hergestellten Bezüge einschätzt oder welche Bezüge jemand anders (beispielsweise eine Mitschülerin) herstellt. Dies kann die Person sehen oder hören. Dabei stellt die Person ebenfalls Bezüge her, nämlich um das Gesagte respektive Gehörte zu verstehen. Vielleicht fragt die Person bei Unklarheiten zurück oder formuliert in ihren eigenen Worten, wie sie die andere Person verstanden hat.

Bei diesen Handlungen ist die soziale Dimension der Normen direkt beteiligt. Die Einschätzungen einer zweiten Person sind der Anlass für das eigene Strukturieren.

Sichtbarmachen

Eine Person kann mit ihren Fingern auf einzelne Teile im Ausdruck zeigen, sie anfärben, sie umkreisen, Pfeile zwischen einzelnen Teilen zeichnen oder einfach zusätzliche Klammern zur Verdeutlichung setzen. Mit solchen Handlungen macht die Person ihre hergestellten Bezüge sichtbar.

2.2.3 Interne und externe Repräsentationen

Mit der Konzeption des Strukturierens als Handeln mit den Zeichen geht eine Auflösung der Trennung in *externe* und *interne* Repräsentation einher. Der Fokus liegt ganz auf den externen Zeichen und ihren externen Verwendungsweisen. Über interne Repräsentationen wird nichts ausgesagt. Das ist eine Folge der semiotisch-pragmatischen Sichtweise. In kognitionspsychologischen Ansätzen hingegen wird zwischen der externen Repräsentation (die wahrnehmbar ist) und der internen (mentalen) Repräsentation unterschieden. Wesentlich ist die interne Repräsentation, die externe ist bloß Ausdruck davon. Interne und externe Repräsentation sind in der Regel durch eine Abbildungsfunktion miteinander verbunden. Diese Abbildungsfunktion bildet auch die internen Operationen auf die extern beobachtbaren Handlungen ab (Schnotz, 1988, 2005). Die allgemeine semiotische Frage nach der Beziehung zwischen dem Zeichen und seinem Bezeichneten wird in der Kognitionspsychologie zur Frage nach der Beziehung zwischen den externen und den internen Repräsentationen, bei der semiotisch-pragmatischen Sichtweise ist es die Frage zwischen dem (extern) gegebenen Zeichen und seiner (externen) Handhabung.

Radford (2000, S. 239) führt zwei Gründe für seine Wahl einer semiotisch-pragmatischen Sichtweise an. Erstens hat die Trennung in externe und interne Repräsentation seines Erachtens einen reduktiven Charakter. Denn in der Kognitionspsychologie ist die externe Repräsentation bloß ein Abbild der internen. Zweitens ist aus konzeptueller Warte unklar, von welcher Art die Abbildungsfunktion ist, welche zwischen der internen und externen Repräsentation vermittelt.

Indem die semiotisch-pragmatische Sichtweise ganz auf die externe Repräsentation fokussiert, rückt das Materielle des gegebenen Ausdrucks in den Vordergrund. Es geht um die auf dem Blatt notierten Zeichen und die Art und Weise, wie Personen mit ihnen (mathematisch) arbeiten. Aus diesem Grund sprechen etwa Filloy und Rojano (1989, S. 20) beim algebraischen Umformen davon, dass „it is necessary to operate on what is represented“. Damit betonen die Autoren, dass mit den auf dem Papier notierten und wahrnehmbaren Zeichen gearbeitet wird. Dafür interessieren sich Filloy und Rojano und nicht für die Art und Weise, wie allfällige interne Repräsentationen allfälligen internen Prozessen unterworfen sind. In den Worten von Dörfler (2006a, S. 210) klingt dies so: „Diagramme haben damit eine materielle, wahrnehmbare Basis in der Form von Inskriptionen (‚Geschriebenem‘), sei es auf Papier, auf einem Computerschirm oder sonst wo.“ Das Strukturieren sowie das Umformen eines algebraischen Ausdrucks wird dann zum Hantieren am materiell vorliegenden Ausdruck, an den in Raum und Zeit gegebenen Zeichen. So kann algebraisches Umformen in letzter Konsequenz als „Bewegung in einer Landschaft“ (Wittmann, Flood & Black, 2013) verstanden werden: Die algebraischen Zeichen haben auf dem Blatt Papier einen Ort und werden beim Umformen auf der Landschaft des Blatts von einem Ort zum anderen bewegt, ganz anlog zum Hin- und Herbewegen physikalischer Objekte.

2.3 Die Bedeutung einer Strukturierung

„Die Frage nach der Bedeutung zielt ins Herz der [...] Forschung zur Algebra“ (Kieran, 2006, S. 30). Denn Terme und Gleichungen haben für sich allein keine Bedeutung. Sie werden erst bedeutungsvoll, wenn ein Term umgeformt, eine Gleichung gelöst, ein Term als Funktionsterm behandelt oder eine Gleichung zur Nullstellenbestimmung genutzt wird. Bedeutungsvoll ist das, was mit den Termen und Gleichungen gemacht wird. Der Gebrauch ist ihre Bedeutung. Damit folgt die vorliegende Arbeit einem pragmatischen Bedeutungskonzept (vgl. Abschnitt 2.3.2). Das Ziel dieses Abschnitts ist die Darlegung dieses pragmatischen Bedeutungskonzepts und seine Nutzung zur begrifflichen Bestimmung der Bedeutung einer Strukturierung.

Diese Bedeutung einer Strukturierung eines Ausdrucks wird gleich dem personalen Gebrauch der Strukturierung gesetzt werden. Diese Festlegung fußt auf zwei Konzepten. Erstens – wie bereits erwähnt – auf dem pragmatischen Bedeutungskonzept und zweitens auf der Unterscheidung zwischen einer personalen und einer allgemeinen (respektive institutionalen) Bedeutung. Beide

Konzepte werden im Folgenden umschrieben.

Vorgängig wird aber geklärt, welche Gebrauchsweisen eines Ausdrucks beim kalkülorientierten Umformen überhaupt im Fokus stehen. Das gelingt mithilfe der Unterscheidung zwischen einer externen und einer internen Semantik.

2.3.1 Externe und interne Semantik

Die Unterscheidung in eine inner- und eine außermathematische Semantik von Termen und Gleichungen ist nützlich zur besseren thematischen Verortung dieser Arbeit. Kieran (2006) spricht von *interner* und *externer Semantik*. Im ersten Fall verwenden Personen die Ausdrücke zur Bearbeitung mathematischer Fragestellungen. Typisch dafür sind gemäß Kieran das Umformen von Ausdrücken und das Darstellen von Ausdrücken als Wertetabelle oder Graph. Im zweiten Fall beziehen die Personen die Ausdrücke auf Ereignisse und Situationen außerhalb der Mathematik und modellieren etwa reale Problemstellungen. Ähnlich unterscheiden Hiebert und Carpenter (1992, S. 72) zwei Arten, wie sich bei Lernenden die Bedeutung von mathematischen Symbolen entwickelt. Einerseits lernen sie innerhalb des mathematischen Systems, Verbindungen zwischen Symbolen herzustellen, und andererseits verbinden sie Symbole mit Darstellungen außerhalb des Systems, etwa mit physikalischen Objekten. Die erste Art der Bedeutungskonstruktion korrespondiert mit der internen, die zweite mit der externen Semantik. Ebenso folgt Freudenthals (1991) Unterscheidung in *vertikale* und *horizontale Mathematisierung* jener in interne und externe Semantik.

Zweifelsohne sind die interne und externe Semantik voneinander abhängig, gerade beim Erlernen der Algebra. Trotzdem wird hier auf die erstgenannte fokussiert und dabei auf das Umformen algebraischer Ausdrücke. Denn in den empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) werden den Probanden die Terme und Gleichungen losgelöst von außermathematischen Zusammenhängen vorgelegt. Thema hier ist also, wie Probanden beim Manipulieren im algebraischen Kalkül interne Bedeutung für sich konstruieren und nicht, wie sie für sich beim Modellieren realer Situationen externe Bedeutung konstruieren.

Grundsätzlich gilt es aber zu bedenken, dass auch die externe Semantik die Strukturierung eines algebraischen Terms beeinflussen kann. Das ist beispielsweise dann der Fall, wenn ein Term eine reale Situation modelliert und genau diese Situation die semantische Basis für die Form des Terms bildet. Für die Diskussion solcher Aspekte sei auf die Literatur verwiesen: Biehler und Leiss (2010), Boero (2001), Fischbein, Deri, Nello und Marino (1985), Prediger (2009), Reusser (1989) und vom Hofe (1995). Entsprechend spielt bei der Betrachtung der internen Bedeutung in dieser Arbeit nur das Umformen algebraischer Ausdrücke eine Rolle. Für deren Darstellung als Wertetabelle oder Graph sei ebenfalls auf die Literatur verwiesen, etwa auf Brenner et al. (1997), Goldin (2002), Kaput (1989), Leinhardt, Zaslavsky und Stein (1990), Sfard und Linchevski (1994) sowie Slavit (1997).

Kieran (2006) postuliert eine dritte Komponente der Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks, eine außerhalb der Mathematik und außerhalb des Problemkontexts liegende. Dabei denkt Kieran vor allem an Gesten und Bewegungen, welche mathematische Tätigkeiten begleiten, sowie an den körperlich erfahrbaren Umgang mit elektronischen Hilfsmitteln wie Computer und Taschenrechner. Zur Illustration sei ein Beispiel aus Boero, Bazzini und Garuti (2001) vorgestellt. Die Autoren forderten einen Experten zur Lösung der Ungleichung $x \sin x > x^2 - 1$ auf. Die Analyse der Daten belegt, dass der Experte Sachverhalte mithilfe von Gesten darstellt. Etwa zeichnet er Parabeln und Geraden mit den Händen in die Luft und deutet jene Stellen an, wo die Werte zu- und abnehmen. Er stellt Skizzen her, weist zur Unterstützung seiner Erklärungen mit den Fingern darauf, und er macht symmetrische Gesten mit beiden Händen zur Verdeutlichung von Symmetrien in den Graphen. Die Autoren argumentieren, dass solche Gesten als verkörperlichte Bedeutungen verstanden werden können. In der vorgelegten Arbeit bilden solche verkörperlichten Bedeutungen keine eigene Kategorie – im Gegensatz zu Kieran (2006). Denn diese verkörperlichten Bedeutungen sind erstens Handlungen, die mit mathematischen Zeichen verbunden sind, und als solche werden sie zweitens als Teil der Bedeutung dieser Zeichen begriffen aufgrund des pragmatischen Bedeutungskonzepts (vgl. Abschnitt 2.3.2). Somit ist hier die Unterscheidung in interne und externe Semantik gleich der Unterscheidung in einen inner- und außermathematischen Kontext.

2.3.2 Pragmatisches Bedeutungskonzept

Allgemein behandelt die Pragmatik das Sprechen als eine besondere Weise des Handelns (Prechtl, 1999). Die Bedeutung von Sätzen und Begriffen führt daher nicht zur Frage nach ihrer repräsentierenden Funktion, sondern nach ihrer Verwendungsweise. Denn gemäß der Pragmatik liegt die Bedeutung eines Handlungsakts in seiner Verwendung: Wann handle ich so? Wie vollziehe ich diesen Handlungsakt korrekt? Analog fragt die Pragmatik bei Sprechhandlungen: Wann verwende ich den Begriff so? Wie verwende ich ihn korrekt? Diese Fragen bestimmen die Bedeutung des Begriffs. In diesem Sinn ist der Gebrauch eines Begriffs respektive seine Handhabung und Verwendung gleich seiner Bedeutung.

Dieses Bedeutungskonzept wird auf algebraische Ausdrücke übertragen. Wer beispielsweise einen Ausdruck wie $x^2 + 3x - 4$ gebrauchen kann, hat seine Bedeutung erfasst. Diese umfasst beispielsweise die Auflösung der Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ nach x, die Diskussion der Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$ oder auch die Modellierung realer sowie innermathematischer Situationen, wo

$x^2 + 3x - 4 = 0$ eine Rolle spielt.

Solche Verwendungen eines algebraischen Ausdrucks wie $x^2 + 3x - 4$ sind als Handlungen zu verstehen, die seiner Bedeutung entsprechen. Diese Handlungen können sogar explizit gemacht werden. Brandom (2000) spricht von *Inferenzen*, welche als *Konditionale* explizit gemacht werden. Wichtig hierbei ist, dass das Explizite (die Konditionale) im Impliziten (in den Inferenzen) fundiert ist – und nicht umgekehrt. Manchmal wird in der Literatur das Explizite als *mathematisches Wissen* bezeichnet. Steinbring (1998, S. 162) schreibt beispielsweise: „Die (offenen) Begriffs-Beziehungen machen das mathematische Wissen aus." Diese Auffassung wird auch in kognitionspsychologischen Herangehensweisen vertreten (Hiebert & Lefevre, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992). Allerdings ist hier tendenziell das Implizite im Expliziten fundiert.

2.3.3 Personale und institutionale Bedeutung

In Abschnitt 2.2.1 ist mit der Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks ein individualisierter Begriff der Struktur definiert. Ebenso muss der Begriff der pragmatischen Bedeutung individualisiert werden. Diese Bedeutung ist jene, die das Kollektiv der Mathematikerinnen und Mathematiker einem Begriff zuweist, und ist zu unterscheiden von jener Bedeutung, die ihm eine Person zuweist. In diesem zweiten Fall sprechen Godino und Batanero (1998) von der *personalen* (personal) Bedeutung. Sie entspricht der „individualisierten Bedeutung". (Eigentlich müsste von einer personalen pragmatischen Bedeutung die Rede sein, doch aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird abkürzend nur „personale Bedeutung" verwendet.)

Gemäß dem pragmatischen Bedeutungskonzept wird die Bedeutung eines mathematischen Begriffs gleichgesetzt mit den Praktiken jener Personen, die diesen Begriff zu verwenden wissen. Godino und Batanero (1998) führen nun die *institutionale* und die *personale* Bedeutung ein, um auch bei einer Gruppe von Personen sowie bei einer Einzelperson von „Bedeutung" sprechen zu können. Zur institutionalen Bedeutung geben die Verwendungsweisen der Personen einer Institution Anlass, zur personalen jene einer einzelnen Person. Dabei ist mit einer *Institution* ein Kollektiv von Personen gemeint, die gemeinsame Praktiken teilen. Wichtig in dieser Arbeit wird das Kollektiv der Mathematikerinnen und Mathematiker sein. Die institutionale Bedeutung eines mathematischen Begriffs ist dann gleich seiner pragmatischen Bedeutung. Die personale Bedeutung hingegen bezieht nur jene Praktiken mit ein, die von der bestimmten Person vollzogen werden. Sie spiegelt damit die Bedeutung, die sich eine Person vom Begriff macht.

In dieser Arbeit ist mit der *Bedeutung einer Strukturierung* immer ihre personale Bedeutung gemeint, bezüglich einer bestimmten Person und im Rahmen des algebraischen Umformens jenes Ausdrucks, der gerade strukturiert wird. So wird die Individualität auf der Ebene der Bedeutung erfasst. Diese personale Bedeutung einer Strukturierung ist immer Teil der internen personalen Bedeutung des entsprechenden Ausdrucks. Denn Handlungen, in die Strukturierungen eines Ausdrucks involviert sind, sind trivialerweise Handlungen mit dem Ausdruck selbst. Folglich ist die Bedeutung einer Strukturierung immer auch Teil der personalen Bedeutung des Ausdrucks. Sie ist insbesondere von interner Natur, da hier nur jene Handlungen des Ausdrucks betrachtet werden, die zur internen (und nicht externen) Bedeutung beitragen.

Kausaler Zwang und normativer Druck

Die Unterscheidung zwischen einer pragmatischen und einer personalen (pragmatischen) Bedeutung ist notwendig, da Normen uns nicht im selben Maße zwingen wie Kausalitäten: „Die Regeln zwingen uns nicht unmittelbar wie die Naturgesetze. Ihr Zwang ist vielmehr durch unsere *Einstellung* ihnen gegenüber vermittelt“ (Brandom, 2000, S. 74). Brandom meint mit der „Einstellung“ gegenüber Normen die Art und Weise, wie eine Person diese tatsächlich verwendet – im Gegensatz zur Art und Weise, wie sie sie verwenden sollte. Der Begriff der personalen Bedeutung weist gerade auf diese Einstellung. Bei Kausalitäten ist eine Unterscheidung in Gesetze und Einstellungen zu Gesetzen unmöglich. Den Naturgesetzen sind wir unterworfen. Die Normen hingegen begreifen wir, und das individuell verschieden.

Erst die Unterscheidung in Normen und Einstellungen ihnen gegenüber erlaubt das Vorkommen von Fehlern. Und gerade beim algebraischen Umformen sind Fehler Alltag (Lörcher, 1987; Payne & Squibb, 1990; Sleeman, 1984; Stahl, 2000; Tietze, 1988), selbst bei Experten (Lewis, 1981). Wichtig dabei ist, dass Personen die Fehler nicht (immer) intendieren. Jemand kann einen Ausdruck unangemessen strukturieren, ohne es beabsichtigt zu haben, einfach, weil er oder sie noch nicht gelernt hat, den Ausdruck angemessen zu strukturieren. Seine respektive ihre personale Bedeutung passt noch nicht mit der pragmatischen Bedeutung überein. Wie oben festgehalten, ist dies nur deshalb möglich, weil die Normen uns nicht wie Kausalitäten zwingen, den Ausdruck angemessen zu strukturieren.

Jede Person schafft sich somit einen eigenen Zugang zu den Normen. Das heißt aber auch, dass die Eigenheiten der Person wesentlich darüber entscheiden, welche personale Bedeutung sie sich jeweils konstruiert. Das wird durch die Empirie belegt. So ist beispielsweise in Cohors-Fresenborg und Striethorst (2003) sowie Striethorst (2002) dokumentiert, wie unterschiedliche kognitive Strukturen mit unterschiedlichen Vorstellungen von algebraischen Regeln und Ausdrücken einhergehen. Insofern belegen diese Studien ein weiteres Mal, dass personale Aspekte wesentlich beim Strukturieren sind.

2.4 Ein Auswertungsmodell

In diesem Abschnitt werden Instrumente von Sfard (2008) genutzt, die sie zur Beschreibung des *Wie* (how) und *Wann* (when) des Gebrauchs mathematischer Begriffe einführt. Sfard benötigt diese Instrumente zur Beschreibung von Vorgehensweisen (routines). In dieser Arbeit werden sie übertragen auf die Beschreibung des Strukturierens von Termen und Gleichungen. So gelingt es schließlich, ein Modell für die Rekonstruktion der Bedeutung einer vorgenommenen Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks zu generieren. Weil dieses Modell in Kapitel 4 und 5 der Auswertung von empirischen Daten dient, wird es als „Auswertungsmodell" bezeichnet. Seine Darstellung folgt in wesentlichen Teilen den entsprechenden Abschnitten in Rüede (2012c).

2.4.1 Anwendbarkeits- und Abschlussbedingungen

Die Bedeutung einer Strukturierung eines Ausdrucks ist nach den Überlegungen in Abschnitt 2.3 als ihre personale Bedeutung definiert. Diese wird analog des Wann und Wie einer Regel (Abschnitt 2.1.2) als personales Wann und Wie einer Strukturierung begriffen, also, wann die Person den Ausdruck wie strukturiert. Die Frage ist nun, wie dieses personale Wann und Wie beschrieben werden kann.

Zur Illustration sei die Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ diskutiert. Wenn eine Person diese Gleichung strukturiert, dann hängen die hergestellten Bezüge von ihren mathematischen Erfahrungen und Vorstellungen ab sowie vom Kontext. Dabei umfasst hier der Kontext sowohl die Situation, in der die Aufgabe gestellt wird, als auch Überlegungen, welche die Person eventuell gerade zu dieser Gleichung anstellte. Zum Beispiel ist eine Person vorstellbar, welche die beiden gleichen Klammern aufeinander bezieht mit der Absicht, diese (fälschlicherweise) wegzustreichen, da sie auf beiden Seiten vorkommen. Dafür sind mehrere Gründe denkbar. Gut möglich, dass ihr die Gleichung als zu lang erscheint und sie ihres Erachtens durch das Wegstreichen der gleichen Klammern optisch übersichtlicher wird. Möglich wäre auch, dass die Person zuerst die Gleichung durch Ausmultiplizieren der Klammern korrekt gelöst hat und dann aufgefordert wird, einen zweiten Lösungsweg zu nennen. Dieser Kontext bedingt die Suche nach Alternativen. Vielleicht fällt der Person erst dann die Gleichheit der Klammern auf. Sie interpretiert die Frage nach einem zweiten Lösungsweg als Frage nach einem Trick, deutet aber das Minuszeichen als Vor- statt als Operationszeichen und behandelt dadurch beide Seiten als Multiplikationen. Auf jeden Fall beschreiben beide Szenarien personale und kontextuelle Bedingungen, in denen Personen die beiden gleichen Klammern so aufeinander beziehen, dass ein Wegstreichen resultiert. Solche Bedingungen werden in dem vorliegenden Artikel als *Anwendbarkeitsbedin-*

gungen bzw. synonym *Eröffnungsbedingungen* (applicability conditions bzw. opening conditions; Sfard, 2008) bezeichnet. Sie beschreiben, wann eine Person eine bestimmte Strukturierung herstellt. Wesentlich ist, dass die Frage nach dem Wann zusätzlich davon abhängt, ob an der hergestellten Strukturierung festgehalten oder ob sie verworfen wird. Die dafür entscheidenden Bedingungen heißen *Abschlussbedingungen* (closing conditions; Sfard 2008). Es sei die Strukturierung zwischen den beiden gleichen Klammern in der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ vor dem Hintergrund des Wegstreichens in Erinnerung gerufen. Vielleicht fällt einer Person nach der Entdeckung der Gleichheit der beiden Klammern das Minuszeichen auf der rechten Seite der Gleichung auf. Sie argumentiert, dass sich daher die Vorzeichen in den Klammern ändern und als Folge die Klammerinhalte verschieden sind. Diese Abschlussbedingung würde zu einem Verwerfen der Strukturierung führen. Eine andere Abschlussbedingung ist es, wenn eine Person die Klammern wegstreicht, $7 = 100 - 3$ erhält und die Strukturierung ebenfalls verwirft, weil sonst die Unbekannten wegfallen und sie nicht mehr ein Resultat der Form $x = \ldots$ erhalten würde, das heißt, nicht mehr nach x auflösen könnte.

Allgemein entsprechen Anwendbarkeits- und Abschlussbedingungen der Art und Weise, wie eine Person jene impliziten Normen (metarules; ebd.) versteht, welche darüber entscheiden, wann (in welcher Situation) eine bestimmte Strukturierung angemessen ist. Wichtige Aspekte sind hierbei der vorgelegte algebraische Ausdruck, die Erfahrungen sowie das Wissen und Können der Person und die Umstände, unter denen der Term vereinfacht, respektive die Gleichung gelöst werden muss. Im Speziellen beschreiben Anwendbarkeitsbedingungen, wann die Person eine bestimmte Strukturierung vornimmt, und die Abschlussbedingungen, wann sie daran festhält oder nicht. Die Anwendbarkeitsbedingung führt zu einer bestimmten Strukturierung und die Abschlussbedingung bestimmt, ob diese akzeptiert oder verworfen werden soll.

2.4.2 Das Modell

Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung sind in einer Art Zangenform mit der Strukturierung und der Konsequenz verbunden, wie in Abbildung 2.2 dargestellt. Sie beantworten die Frage nach dem Wann der Strukturierung; die hergestellte Strukturierung beantwortet das Wie. Ein Beispiel einer solchen Strukturierung von obiger Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ ist etwa der Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern, der hergestellt wird, um sie wegzustreichen. Denkbar ist auch, die 7 auf die linke Klammer sowie die 3 auf die rechte Klammer operativ aufeinander zu beziehen, mit dem Ziel des Ausmultiplizierens.

Schließlich impliziert die Strukturierung eine *Konsequenz* (Folge), die aus ihr erschlossen wird. Diese manifestiert sich beispielsweise als Umformung oder

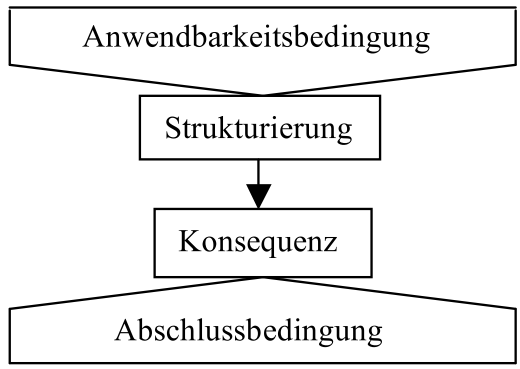

Abbildung 2.2: Die Beziehungen zwischen Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung im Auswertungsmodell (Abbildung aus Rüede, 2012c, S. 123)

in einer weiteren Strukturierung und erlaubt die Beurteilung davon, inwiefern die Abschlussbedingung erfüllt ist oder nicht. Nochmals sei an $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ erinnert und an den Bezug zwischen den beiden gleichen Klammern, der hergestellt wird, um sie wegzustreichen. Eine Person kann daraus – wie oben erwähnt – auf $7 = 100 - 3$ schliessen. Eine andere Konsequenz wäre, dass eine Person aufgrund des Streichens der Klammern auf das Minuszeichen aufmerksam wird und sich Gedanken über die Verrechnung dieses Minuszeichens mit der Klammer macht.

Indem die Anwendbarkeitsbedingung, die Strukturierung, die Konsequenz und die Abschlussbedingung identifiziert wird, wird trivialerweise die Strukturierung beschrieben, aber auch, und das ist das Wesentliche, ihre Bedeutung. Denn mit diesen Konstrukten wird das Wann und Wie und somit der Gebrauch der Strukturierung inklusive der Konstruktion ihrer (personalen) Bedeutung erfasst.

2.5 Terme als Prozesse, Verfahren und Objekte

Mit den Abschnitten 2.1, 2.2, 2.3 und 2.4 ist ein Großteil der theoretischen Arbeit geleistet. Der Begriff der Strukturierung und der Bedeutung einer Strukturierung ist definiert und in semiotisch-pragmatischen Ansätzen fundiert. Die entsprechenden Umschreibungen erlauben die Konzeption erster empirischer Untersuchungen von Strukturierungen. Das wird Gegenstand der Kapitel 3, 4 und 5 sein. Ausgehend von den empirischen Resultaten wird in Kapitel 6 ein Blick auf die Frage geworfen, wie sich das Strukturieren entwickelt. In diesem Abschnitt werden nun die Grundlagen gelegt, um diese Diskussion dann führen zu können. Das Zentrum dieser Betrachtungen wird die Unterscheidung sein, ob ein algebraischer Term als Prozess oder als Objekt behandelt werden kann (Davis, 1975; Dubinsky, 1991; English & Sharry, 1996; Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991; Tall et al., 2000). In der Algebradidaktik spielt diese Idee nahezu die Hauptrolle. Denn sie erklärt viele Unterschiede zwischen jenen Schülerinnen und Schülern, die im Umgang mit algebraischen Ausdrücken erst am Anfang stehen, und jenen, die fortgeschritten sind.

Darüber hinaus kann ein Großteil des Schulstoffs vom Kindergarten bis zum Gymnasium unter Nutzung des Begriffspaars von Prozess und Objekt mathematikdidaktisch diskutiert werden. Denn nebst algebraischen Termen können auch arithmetische Terme (Gray & Tall, 1994), Variablen (Graham & Thomas, 2000) oder auch Funktionen (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992) als Prozesse oder Objekte behandelt werden.

Trotz der überaus prominenten Rolle dieses theoretischen Konzepts fehlt in den veröffentlichten Arbeiten mancherorts eine präzise Formulierung davon, was mit der Behandlung als Prozess und als Objekt jeweils gemeint ist (Gilmore & Inglis, 2008). Daher wird im Folgenden festgelegt, wie diese Begriffe in dieser Arbeit verstanden werden. Eine ganz präzise Definition der Behandlung eines algebraischen Ausdrucks als Prozess respektive Objekt wird aber erst in Kapitel 6 möglich sein. Zudem spielt in der vorgelegten Arbeit neben dem Begriff „Objekt“ und „Prozess“ auch der Begriff „Verfahren“ eine wichtige Rolle, insbesondere werden „Behandlung als Prozess“ und „Behandlung als Verfahren“ Unterschiedliches bezeichnen. Denn beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen spielen Verfahren eine dominante Rolle. Das wurde bislang in der Literatur nur wenig ausgeführt, obwohl die zentrale Rolle der Verfahren beim algebraischen Umformen anerkannt ist.

Also wird im Folgenden die Behandlung eines Terms als Prozess, Verfahren oder Objekt beschrieben. Erstens wird auf die Betonung von Charakteristiken fokussiert hinsichtlich möglicher Unterscheidungen entsprechender Prozesse des Strukturierens: Wie wird eine Person einen Term strukturieren, die ihn als Prozess, Verfahren respektive Objekt behandelt? Zweitens interessiert die Frage, inwiefern die Behandlung eines Terms als Objekt jene als Prozess voraussetzt. Diese Frage ist gegenwärtig in der Literatur kontrovers diskutiert. Hier wird sich zeigen (und in Kapitel 6 dann ausgeführt), dass die Rolle der Verfahren wesentlich ist und vermutlich bislang zu wenig berücksichtigt wurde. Diese Betrachtungen sind wichtig für die Weiterentwicklung der Theorie in Kapitel 6, insbesondere bei den Überlegungen zur Entwicklung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke.

2.5.1 Einen Term als Prozess behandeln

Wer einen algebraischen Term als Prozess behandelt, führt einzig die in ihm angegebenen Operationen aus, zumindest soweit das möglich ist. Der Term wird zur Rechnung. Ein Beispiel: Zu vereinfachen sei $6 \cdot \frac{2x}{4} - \frac{2x}{4} \cdot 6$. Denkbar ist eine Person, welche die angegebenen Operationen gemäß der Regel „Punkt vor Strich" ausführt. Angenommen, die Person begreift in dieser Faustregel das Wörtchen „vor" temporal: Es darf nicht subtrahiert werden, bevor die Multiplikation tatsächlich ausgeführt ist. Die Person wird daher zuallererst 6 mit $\frac{2x}{4}$ multiplizieren – und nicht etwa $6 \cdot \frac{2x}{4}$ und $\frac{2x}{4} \cdot 6$ voneinander subtrahieren, denn dann hätte sie eine Strichoperation ausgeführt, bevor sie ausmultipliziert hätte. Die Person führt also $\frac{2x}{4} \cdot 6$ aus und erhält möglicherweise $\frac{12x}{4} - \frac{12x}{4}$. Fasst die Person auch diesen Ausdruck als Prozess auf, wird sie eventuell zuerst die Divisionen ausführen. Das führt zu $3x - 3x$ und dann – so die Hoffnung – auf 0.

Die Behandlung eines Terms als Prozess wird entsprechende Strukturierungen zur Folge haben. Obiger Umformung kann beispielsweise folgende Strukturierung zugrunde liegen: 6 wird multiplikativ auf $\frac{2x}{4}$ bezogen. Alle anderen Zeichen spielen vermutlich keine Rolle. Eine genauere Spezifizierung dieser Strukturierung hängt allerdings davon ab, wie die Person die Zahl 6 mit dem Bruch $\frac{2x}{4}$ multipliziert. Vielleicht behandelt sie 6 als $\frac{6}{1}$, vielleicht bezieht sie direkt die 6 auf die $2x$. Grundsätzlich ist anzunehmen, dass die Person nur jene Teile aufeinander bezieht, die sie als Erstes miteinander verrechnen kann. Alles andere wird die Person nicht berücksichtigen. Sie wird wahrscheinlich nur auf die zu verrechnenden Teile fokussieren. Es ist daher zu vermuten, dass eine solche Person Schwierigkeiten mit Umformungen haben wird. Denn diese zielen nicht auf die Ausführung der Rechnung, die durch den Term dargestellt wird. Entsprechende Strukturierungen werden tatsächlich Gegenstand der in den folgenden Kapiteln vorgestellten empirischen Studien sein.

Die Behandlung eines Terms als Prozess kann zu typischen Fehlern führen. Vor allem dann, wenn die Operationen im Term gar nicht ausgeführt werden können. So addieren Anfänger im Algebraunterricht etwa $2x + 3$ zu $5x$, indem sie 2 und 3 addieren und das restliche x dazuschreiben (Tirosh, Even & Robinson, 1998).

2.5.2 Einen Term als Verfahren behandeln

In der Mathematik, insbesondere der Algebra, sind Verfahren wichtig (Cooper & Sweller, 1987; Nesher, 1986). In Anlehung an Star et al. (2005) wird hier von einem *Verfahren* gesprochen, wenn es sich um einen explizierbaren Algorithmus handelt, der zur Lösung von Problemen eines bestimmten Typs führt. Typische Beispiele sind etwa die Standardverfahren zum Lösen von linearen respektive quadratischen Gleichungen oder auch das Kürzen von Bruchtermen.

Die Behandlung eines Terms als Verfahren ist meines Wissens in der Literatur nicht in dieser Allgemeinheit definiert wie etwa jene als Prozess oder Objekt. Das ist umso erstaunlicher, als jede Lehrperson in ihrem Unterricht schon beobachtet haben wird, dass einige Schülerinnen und Schüler einen vorgegebenen Term oder eine vorgegebene Gleichung nur als Befehl begreifen, ein bestimmtes Verfahren auszuführen. Das wird hier als Behandlung eines Terms respektive einer Gleichung als Verfahren verstanden. Es ist wohl das, was Skemp (1978) mit instrumentellem Verstehen meint, und ist ganz analog zur Behandlung des Gleichheitszeichens als Befehl zu sehen. Beispielsweise reagieren gewisse Kinder auf den Ausdruck $8 + 4 = \square + 5$ mit der Antwort 12 oder 17 für die Box $\square$. Für sie steht das Gleichheitszeichen in diesem Fall für den Befehl, die Zahlen zu addieren. Als Folge addieren sie 8 und 4 respektive alle drei Zahlen 8, 4 und 5. Bei Studien zum Umgang mit dem Gleichheitszeichen bilden solche Behandlungsweisen in aller Regel das Zentrum der Diskussion (Herscovics & Kieran, 1980; Knuth et al., 2006; McNeil & Alibali, 2004; Rittle-Johnson et al., 2011; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Winter, 1982).

Obige Überlegungen machen klar, dass die Behandlung eines Terms als Prozess und jene als Verfahren unterschiedliche Behandlungsweisen sind. Besonders aus pragmatischer Sicht ist es sinnvoll, diese Unterscheidung zu machen. Konsequenterweise wird eine Person, die einen algebraischen Ausdruck als Verfahren behandelt, ihn – so die Hypothese – auch entsprechend strukturieren. In den folgenden Kapiteln wird von *verfahrenbasiertem* Srukturieren die Rede sein. Dabei wird aufgrund eines spezifischen Merkmals ein Verfahren an den algebraischen Ausdruck herangetragen, welches das Strukturieren des Ausdrucks leitet. Es werden Teile des Ausdrucks identifiziert und so aufeinander bezogen, dass das Verfahren ausführbar wird.

Als Beispiel wird einmal mehr die Gleichung $7(16x + 3) = 100 - 3(16x + 3)$ aufgegriffen. Wenn eine Person diese Gleichung als Verfahren behandelt, dann ist für sie vermutlich das Merkmal der Klammer entscheidend. Sie begreift die Klammern als Befehl, auszuklammern. Daher strukturiert sie verfahrenbasiert. Sie identifiziert jeweils einen Vorfaktor und bezieht diesen multiplikativ auf die einzelnen Summanden in der Klammer. Typisch für diesen Fall wäre, dass das Subtraktionszeichen auf der rechten Seite von der Person als Vorzeichen behandelt würde. In die entsprechende Strukturierung wäre dann das Drehen der Vorzeichen in der Klammer eingebunden. Die Konsequenz dieser Strukturierung bestände in der Ausführung des Standardverfahrens zum Lösen linearer Gleichungen.

2.5.3 Einen Term als Objekt behandeln

Mit der Behandlung eines Terms als Objekt wird dem Term eine Existenz zugewiesen, nahezu eine reale Existenz. So steht am Anfang die Frage, wodurch sich das Erkennen von etwas als Gegenstand auszeichnet. Die Antwort darauf wird im Folgenden zur Definition davon führen, was die Behandlung eines Terms als Objekt meint.

Eine Antwort auf obige Frage liefert beispielsweise Brandom (2000, S. 595): „Gegenstände sind wesentlich Dinge, die als dasselbe wiedererkannt werden können, auch wenn sie auf verschiedene Weise gegeben sind.“ Ein Gegenstand zu sein heißt also, wiedererkennbar zu sein. Wiedererkennen aber ist immer ein Erkennen des Einen als das Andere. Man nimmt auf dasselbe auf zwei Arten Bezug, wie Brandom (2000, S. 595) formuliert: „Ein Gegenstand zu sein heißt, etwas zu sein, auf das auf verschiedene Weise Bezug genommen werden kann.“ Daraus lässt sich für unsere Situation hier die folgende Definition erschließen: Eine Person behandelt einen Term genau dann als Objekt, wenn sie ihn erstens auf zwei unterschiedliche Weisen umformen und zweitens die beiden Umformungen als Umformungen *desselben* begreift. Die zweite Bedingung garantiert, dass die Person die beiden Umformungen auf dasselbe bezieht und nicht einfach zwei verschiedene Aufgaben mit ihnen verbindet. Ein Beispiel: Zu vereinfachen sei $5(x-1)-(x-1)\cdot 5$. Angenommen, eine Person kann $(x-1)\cdot 5$ als Objekt behandeln, dann kann sie erstens $5(x-1)-(x-1)\cdot 5$ beispielsweise einerseits durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen und andererseits direkt zu 0 vereinfachen, indem sie $(x-1)\cdot 5$ zu $5(x-1)$ umformt. Zweitens begreift sie, dass sie beide Male den Teil rechts des mittleren Minuszeichens umformen, ihn sowohl ausmultiplizieren als auch vertauschen kann.

Zwei Umformungen als Umformungen desselben begreifen heißt, dass man die beiden Umformungen als Eigenschaften dieses Etwas begreift. Slavit (1997) spricht daher von *Eigenschafts-Orientierung* (property-oriented view) und setzt dies gleich mit der Behandlung als Objekt. Denn wo ein Objekt ist, gibt es Eigenschaften und wo kein Objekt ist, gibt es keine Eigenschaften. In den folgenden Kapiteln wird sich zeigen, dass beispielsweise Experten ihre Strukturierungen eines Terms als dessen Eigenschaften begreifen. Wer hingegen einen Term als Verfahren behandelt, weist eine Strukturierung nicht dem Term zu, sondern – wenn überhaupt – der Verfahrensausführung.

Hilfreich ist ein Vergleich obiger Definition mit dem, was typischerweise in der Literatur unter der Behandlung eines Terms als Objekt verstanden wird:

> “An object is constructed through the encapsulation of a process. This encapsulation is achieved when the individual becomes aware of the totality of the process, realizes that transformations can act

> on it, and is able to construct such transformations." (Cotrill et al., 1996, S. 171)

Dieses Zitat basiert auf der Annahme, dass sich Objekte aus Prozessen entwickeln. Nur das, was Prozess sein kann, kann auch Objekt sein. Also kommen nur (Teil-)Terme als Objekte in Frage. In diesem Punkt stimmt die vorgelegte Arbeit mit obigem Zitat überein. Ebenso sprechen obige Autoren von Umformung*en* (transformation*s*). Dieser Plural ist eminent wichtig für die Charakterisierung der Behandlung eines Terms als Objekt und entspricht obiger erster Bedingung, dass eine Person den Term auf zwei unterschiedliche Weisen umformen können muss. Die zweite Bedingung, dass die Person die Umformungen als Umformungen desselben begreift, ist im obigen Zitat aber nicht sofort erkennbar. Vermutlich ist mit der Forderung, dass *mit* dem Term gehandelt werden kann, etwas Derartiges gemeint. Denn sie macht explizit, was die Autoren mit der „Totalität des Prozesses“ meinen, nämlich genau das, was beispielsweise auch Gilmore und Inglis (2008) betonen: Erst eine Person, die *mit* dem Term manipulieren kann, kann ihn auch als Objekt behandeln. Meines Erachtens reicht diese Forderung aber nicht für die Zuschreibung der Behandlung eines Terms als Objekt. Denn ansonsten würde eine Person, die bei Bruchtermgleichungen „nur“ die Nenner wegmultiplizieren kann, die entsprechenden Nenner als Objekte behandeln. Denn sie handelt *mit* ihnen. Zur Vermeidung solcher Fälle enthält obige Definition die Klausel, dass es sich bei den Umformungen um Umformungen desselben handeln muss. Das heißt, die hier vorgelegte Definition scheint restriktiver zu sein als die gängigen Definitionen in der Literatur.

Damit sind zwei wichtige Fälle geklärt. Erstens: Wer einen Term nur als Prozess behandeln kann, behandelt ihn nicht als Objekt. Denn er oder sie behandelt den Term dann nur auf eine Art, da jeder Term eine eindeutige Rechnung definiert. Zweitens: Wer einen Term nur als Verfahren behandeln kann, behandelt ihn ebenfalls nicht als Objekt. Denn wenn genau ein Verfahren erkannt wird, kann der Term ja wieder nur auf eine Art behandelt werden. Und werden zwei Verfahren erkannt, diese aber nicht als Verfahren desselben begriffen, dann liegen zwei Verfahren vor und eigentlich zwei Terme (Aufgaben) und nicht einer. Erst wenn die beiden Verfahren als Verfahren desselben behandelt werden, wird der Term als Objekt behandelt. Als Beispiel sei nochmals auf das Vereinfachen von $\frac{12x}{4} - \frac{12x}{4}$ hingewiesen. Eine Person, die Terme als Verfahren behandelt, würde diese Aufgabe in einem ersten Anlauf als Aufforderung zum Kürzen und in einem zweiten Anlauf als Aufforderung zum Auf-einen-Bruchstrich-Bringen begreifen. Die Person würde dies dann einfach als zwei verschiedene Aufgaben verstehen. Sie würde – so die Hypothese – in einem Interview vermutlich einfach zwei verschiedene Verfahren beschreiben, ohne diese aufeinander zu beziehen, insbesondere sie nicht als Eigenschaften begreifen.

Welche Strukturierungen werden mit der Behandlung eines Terms als Objekt einhergehen? Der Term wird nicht als ein spezifisches Verfahren behandelt, sondern als Term mit Eigenschaften, die sich für das eine oder andere Vorgehen nutzen lassen. Die Person wird daher vermutlich explorieren, wie sie umformen soll. Vor diesem Hintergrund strukturiert sie den Term. Die so hergestellten Strukturierungen bezeichne ich daher als *explorierend*.

Dass mit der Behandlung eines Terms als Objekt typischerweise die Existenz eines Gegenstands (eines mathematischen Objekts) gemeint ist, wird beispielsweise auch in der Arbeit von Davis (1975, S. 18) klar. Für ihn gleicht das Behandeln eines Terms als Objekt dem Arbeiten mit dem Term als „Name“ für das Resultat des darunterliegenden Prozesses. Diese Idee drückt aus, dass der Term als Einheit begriffen wird. Insbesondere wird er auch substituierbar, beispielsweise durch einen kürzeren Namen wie a oder b. Einerseits ist diese Fähigkeit des Substituierens nach Jones (2009) ein zentraler Aspekt einer Behandlung des Gleichheitszeichens als Relation – und nicht als Befehl. Andererseits wird im Abschnitt 6.3.2 gezeigt, dass die Behandlung eines Terms als Objekt als Umstrukturierung verstanden werden kann und damit als Substitution.

2.5.4 Vom-Prozes-zum-Objekt-Ansätze

Mit den Abschnitten 2.5.1, 2.5.2 und 2.5.3 sind drei verschiedene Behandlungsweisen von Termen vorgestellt. Ebenso wurden erste Überlegungen zu ihren Auswirkungen auf das Strukturieren angestellt. Eine genaue Klärung bleibt aber den empirischen Studien vorbehalten (Kapitel 4 und 5). Weil aber die vorgelegte Arbeit auch nach der Entwicklung des Strukturierens fragt, stehen im Folgenden mögliche Entwicklungen der drei Behandlungsweisen von Termen im Zentrum. Die Frage ist: Entwickeln sich Lernende so, dass sie zuerst Terme als Prozesse und erst dann als Objekte behandeln (müssen)? Diese Frage wird in der Mathematikdidaktik kontrovers diskutiert. Bikner-Ahsbahs et al. (2011) unterscheiden daher zwei Typen von Theorien zur Konstruktion mathematischen Wissens. Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze und solche Ansätze, die keine solche Entwicklungsrichtung voraussetzen. Vertreter des ersten Typs votieren für eine Entwicklung von der Behandlung eines Terms als Prozess zu jener als Objekt. Wichtige Ansätze dieses Typs sind in diesem Abschnitt vorgestellt. Vertreter des letzteren Typs sehen keine Notwendigkeit für diese Entwicklungslogik. Entsprechende Ansätze sind Thema von Abschnitt 2.5.5.

Operationale und strukturale Auffassungen

Sfard (1991) verwendet die Begriffe der *operationalen* (operational) und *strukturalen* (structural) Auffassung. Sie korrespondieren zur Behandlung eines Terms als Prozess respektive Objekt. Wichtig ist, dass die operationalen und strukturalen Auffassungen als Stufen der Entwicklung konzipiert sind. Zur Rechtfertigung dieser starken Aussage bietet Sfard (1991) zwei Argumentationslinien an.

Erstens zeichnet Sfard die historische Entwicklung nach: Mathematische Begriffe haben sich im Laufe der Geschichte vom Operationalen hin zum Strukturalen entwickelt. Beispielsweise waren mit Brüchen zu Beginn vorwiegend Divisionsprozesse und Verfahren der Vermessung verbunden. Ein Bruch wie $\frac{7}{4}$ stellte einen Prozess dar, der aus mathematischer Sicht mit der Division $7 : 4$ korrespondierte. Erst viel später behandelte die Menschheit einen Bruch wie $\frac{7}{4}$ als Zahl, etwa indem Brüche Streckenlängen bezeichneten oder der Konstruktion von Zahlenfolgen dienten. Das Gemeinsame solcher Ontogenesen ist die anfängliche Behandlung eines Ausdrucks als Prozess und der zeitlich viel späteren Nutzung desselben Ausdrucks zur Bildung von Konstrukten, in die der Ausdruck als Bezeichner einging – und nicht als Rechenprozess.

Zweitens argumentiert Sfard kognitionspsychologisch, vorwiegend auf Piagets Werk beruhend. Gemäß ihrer Interpretation von Piagets Überlegungen führen drei Stufen von operationalen zu strukturalen Auffassungen. Die erste Stufe bildet die *Verinnerlichung* (interiorization) von Prozessen. Der Lernende braucht kein Papier und Bleistift mehr, um eine einfache, konkrete Umformung auszuführen. Die zweite Stufe besteht in der *Kondensation* (condensation) von mehreren Prozessschritten zu einem. Der Lernende ist geübt im Umformen. Die dritte Stufe ist die *Reifikation* (reification) der Prozesse zu Objekten. Durch diese Reifikation werden mehrere, bislang unverbundene prozessuale Komponenten zu einem Objekt vereint: "Various representations of the concept become semantically unified by this abstract, purely imaginary construct" (ebd., S. 20). Sfard betont, dass dazu die Bildung eines hierarchisch höheren Schemas nötig sei. Durch die Bildung eines solchen Schemas werden kognitive Elemente miteinander vernetzt, die in der operationalen Phase nur sequenziell gegliedert und unzusammenhängend waren.

Für Sfard ist der Übergang von der Verinnerlichung zur Kondensation bloß von quantitativer Natur. Hingegen ist die Reifikation ein qualitativer Schritt. Die algebraischen Ausdrücke werden dann statisch, es geht nur noch um Relationen, nicht mehr um Operationen. Die Relata der Relationen sind die Ergebnisse der Operationen.

APOS: Aktion, Prozess, Objekt, Schema

In Dubinsky (1991) und Dubinsky und Lewin (1986) wird der Frage nach einem psychologisch fundierten Unterrichtskonzept nachgegangen. Das Resultat der Überlegungen ist ein Modell, das später das Akronym APOS erhält gemäß den Stufen: Aktion, Prozess, Objekt und Schema (Cotrill et al., 1996; Dubinsky & McDonald, 2002). Dieses Modell ist wesentlich auf das Werk von Piaget gestützt. Entsprechend identifizieren Dubinsky und Lewin Stufen, die sehr ähnlich zu jenen von Sfard (1991) sind. Wo aber Sfard mit diesen Stufen die Entwicklung strukturaler Auffassungen von Lernenden beschreibt, nutzt sie die Gruppe um Dubinsky zum Entwurf von Mathematikunterricht. Die Autoren behaupten nicht, dass sich jeder Begriff notwendig entlang diesen Stufen entwickelt, sondern sie behaupten nur, dass er sich so entwickeln kann, wenn man den Unterricht entsprechend gestaltet. Am Anfang einer entsprechenden Unterrichtsplanung steht jeweils ein mathematischer Begriff. Dieser wird einer *genetischen Zerlegung* (genetic decomposition) unterzogen mit dem Ziel, unterrichtsrelevante Tätigkeiten und Aufgaben zu konstruieren, welche die Verinnerlichung, Kondensation und Reifikation unterstützen.

Es sei betont, dass dieses Modell keine (notwendige) Entwicklung von operationalen hin zu strukturalen Auffassungen behauptet, wie etwa bei Sfard (1991). Vielmehr wird behauptet, dass eine solche Entwicklung initiiert werden kann, indem man eine Unterrichtssequenz so konzipiert, dass die Schülerinnen und Schüler zuerst operationale und später strukturale Auffassungen ausbilden müssen. Typischerweise bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in solchen Unterrichtseinheiten anfänglich Problemstellungen, wo die prozeduralen Aspekte eines mathematischen Begriffs wesentlich sind, und erhalten erst mit der Zeit Aufgaben, zu deren Lösung sie den Begriff als Objekt behandeln müssen.

Prozept: Prozedur und Konzept

Sfard (1991) sowie Dubinsky und Lewin (1986) fundieren ihre Unterscheidung von Prozess und Objekt stark in theoretischen Überlegungen. Gray und Tall (1994) werden hingegen durch empirische Daten aus einer Querschnittsstudie zu dieser Unterscheidung geführt. Sie untersuchten die Lern- und Denkwege von Schülerinnen und Schülern. Dabei stellten sie immer dasselbe Phänomen fest: Je höher die Expertise war, umso flexibler wurden prozessuale und konzeptuelle Denkweisen genutzt. Aus diesem Grund führen Gray und Tall die Begriffe der Prozedur, des Prozesses, des Konzepts und des Prozepts ein. Diese Begriffe stehen für unterschiedliche Tätigkeiten und nicht für Entwicklungsstufen wie etwa bei Sfard (Tall et al., 2001). Für Gray und Tall ist der Weg zu strukturalen Auffassungen verbunden mit einem zunehmend flexiblen Umgang mit Termen und Gleichungen. Wer einen gegebenen Ausdruck unterschiedlich umformte und umformen kann, wird den Ausdruck je nach Situation nicht mehr als je andere Prozedur behandeln, sondern eben als ein Etwas (als ein Konzept), das unterschiedlich behandelt werden kann. Gray und Tall (1994) sprechen bei dieser Vereinigung mehrerer Ideen zu einer einzigen mit mehreren Aspekten von *konzeptueller Kompression* mit Verweis auf Thurston (1990).

Das Resultat einer solchen Kompression ist ein *Prozept*, eine Verschmelzung von *Pro*zess und Kon*zept*. Mit diesem Konstrukt betonen Gray und Tall die Mehrdeutigkeit einer symbolischen Notation wie etwa $2x + 4$. Einerseits kann $2x + 4$ als Prozess aufgefasst werden, man kann eine Zahl für x einsetzen und die entsprechende Rechnung ausführen. Andererseits kann $2x + 4$ auch als Konzept verstanden werden, man kann damit zum Beispiel operieren, etwa den ganzen Ausdruck quadrieren, oder auf ihn das Distributivgesetz anwenden. Wer die Fähigkeit besitzt, den Ausdruck $2x + 4$ spontan unterschiedlich zu interpretieren, kann den Autoren zufolge flexibel mit ihm umgehen.

Handlungsakte, Rituale, Explorationen

In Sfard (2008) formuliert und begründet die Autorin auf den ersten Blick ähnliche Entwicklungslinien wie in Sfard (1991). Allerdings unterscheiden sich die Arbeiten von 2008 und 1991 in zwei wesentlichen Punkten. Erstens basieren die Überlegungen in Sfard (2008) auf einem diskursiven Paradigma (vgl. auch Caspi und Sfard, 2012). Zweitens werden Verfahren wichtig. Das ist der entscheidende Punkt. Denn in der Arbeit von 1991 fokussierte Sfard vor allem auf die Prozesse, die durch einen Term dargestellt werden. Im Werk von 2008 werden hingegen die Verfahren wesentlich, die Personen zum Handeln mit den Termen und Gleichungen verwenden.

In Sfard (2008) sind drei Stufen der Entwicklung des Begriffsverständnisses vorgestellt. Diese Entwicklung ist eine sprachliche, es geht um die Beherrschung der Fachsprache. Zu Beginn eines mathematischen Lernprozesses vollziehen Lernende *Handlungsakte* (deeds). Sie gebrauchen die Fachbegriffe mehrheitlich nicht. Nur in ganz spezifischen Situationen, bei bestimmten Handlungsakten, verwenden sie einzelne Fachbegriffe. Diese sind aber nicht in einen ganzen Satz eingebettet, sondern verweisen als einzelnes Wort auf den spezifischen Handlungsakt. Mit der Zeit werden die Lernenden vertrauter mit den mathematischen Gepflogenheiten, beispielsweise üben sie Verfahren ein. Diese verstehen sie vorerst als *Rituale* (rituals). Gemäß dem Charakter von Ritualen gebrauchen die Lernenden einzelne, fixe Sätze und Wendungen, mit denen sie die entsprechenden Verfahren meinen. Allmählich entwickeln sie die Fähigkeit, die Fachbegriffe in eigenständig konstruierten mathematischen Aussagen zu verwenden. Sie sind dann in der Lage, darüber *Explorationen* (explorations) anzustellen und so am fachlichen Diskurs teilzunehmen. Dieser letzte Schritt führt zur Behandlung der Fachbegriffe als Objekte. Er basiert darauf, dass man die Fachbegriffe als Substantive respektive Nomen verwenden, mit ihnen eigene Sätze formulieren, also darüber reden kann.

Wiederum stützt Sfard ihre Aussagen erstens durch das Nachzeichnen der historischen Entwicklung von mathematischen Begriffen. Zweitens verweist sie auf die Institution der Schule, wo die Schülerinnen und Schüler in die diskursive Praxis eingeführt werden. Diese diskursive Praxis ist durch implizite Normen bestimmt, die historisch gewachsen sind (vgl. Abschnitt 2.1.2). Lernen ist eine Einführung in eine soziale Praxis. Das bedingt, dass die Schülerinnen und Schüler auch Vorgehens- und Betrachtungsweisen nachahmen (müssen), die ihnen von der Lehrperson gezeigt wurden. Das führt notwendig zum Umbau von Handlungsakten zu Ritualen und später zu Explorationen.

2.5.5 Alternative Ansätze

Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze waren in den 1990er Jahren nahezu unhinterfragt gültig. In den letzten Jahren mehren sich aber empirische Belege, die diese Ansätze in Frage stellen. Auf eine dieser Studien, Gilmore und Inglis (2008), gehe ich unten näher ein. Eine andere Studie wäre etwa Hewitt (2012).

In Gilmore und Inglis (2008) wird untersucht, ob tatsächlich alle Kinder arithmetische Ausdrücke anfänglich als Prozesse und erst später als Objekte behandeln. Verwendet werden Gleichungen der Form $14 + \square - 11 = 14$. Die Autoren gingen von zwei grundsätzlich verschiedenen Strategien aus. Behandelt ein Kind Ausdrücke als Prozesse, dann wird es wohl zuerst $14 - 11$ und dann $14 - 3$ rechnen. Behandelt ein Kind hingegen Ausdrücke als Objekte, wird es das Inverse von -11 suchen und so auf die Lösung 11 geführt: Eine Inverse-Strategie. Die Autoren variierten sowohl die Position des $\square$-Zeichens als auch des Minuszeichens und setzten zudem Kontrollbeispiele ein wie etwa $14 + \square - 11 = 9$. Jedes Kind bearbeitete 16 Aufgaben, acht Aufgaben, die mit der Inverse-Strategie sofort gelöst werden können, und acht Kontrollaufgaben.

Die Autoren fanden folgendes Ergebnis: Die 53 Kinder ließen sich in drei Gruppen aufteilen. Die erste Gruppe löste sowohl die Inverse-Aufgaben als auch die Kontrollaufgaben mehrheitlich korrekt, die zweite Gruppe mehrheitlich inkorrekt. Die dritte Gruppe löste die Inverse-Aufgaben mehrheitlich korrekt, die Kontrollaufgaben aber mehrheitlich inkorrekt. Darüber hinaus lösten die Kinder der ersten und dritten Gruppe die Inverse-Aufgaben deutlich schneller als die Kontrollaufgaben.

Warum widerspricht dieses Ergebnis den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen? Den Autoren zufolge scheinen die Kinder der ersten Gruppe die Inverse-Aufgaben als Objekte und die Kontrollaufgaben als Prozesse zu behandeln, da sie hier erhöhte Bearbeitungsdauern zeigten. Die Kinder der zweiten Gruppe scheinen alle Aufgaben als Prozesse behandelt zu haben. Die interessanten

Kinder sind jene in der dritten Gruppe. Gilmore und Inglis schlagen folgende Interpretation vor: Diese Kinder können die Inverse-Aufgaben als Objekte behandeln, scheitern aber bei der Behandlung der Kontrollaufgaben als Prozesse. Offenbar neigen diese Kinder dazu, arithmetische Ausdrücke zuerst als Objekte und erst dann als Prozesse zu behandeln. Also zeigt nicht jedes Kind jene Entwicklung, welche Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze vorschreiben. (In Abschnitt 6.3.5 wird eine andere Interpretation dieses Ergebnisses vorgeschlagen.)

Doch nicht nur solch empirischen Befunde tragen zur Kontroverse mit den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen bei. Es gibt alternative Ansätze, die die Entstehung mathematischen Wissens plausibel und verträglich mit der Empirie beschreiben, ohne auf die Entwicklung von der Behandlung eines Ausdrucks als Prozess hin zur Behandlung als Objekt zurückgreifen zu müssen. Ein entsprechendes Beispiel sei nun vorgestellt.

Objektifizierung durch Nutzung semiotischer Mittel

Studien, die den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen folgen, untersuchen vor allem Stufen der Entwicklung. Studien, die alternative Ansätze verfolgen, setzen sich hingegen vorwiegend mit den Mitteln auseinander, mit denen man mathematisches Wissen erlangen kann. Thema ist nun jener Ansatz, der dabei auf die semiotischen Mittel fokussiert.

Ausgangspunkt sind die anthropologischen Ansätze der Mathematikdidaktik. Diese gehen davon aus, dass mathematische Objekte abhängig von uns Menschen sind (Bosch, Chevallard & Gascón, 2005; Chevallard, 2005). In diesen Ansätzen sind mathematische Objekte keine eigenständigen Entitäten, die wie beispielsweise im Platonismus einer idealen Welt zugehören, sondern es sind von uns generierte Metaphoriken (Font, Bolite & Acevedo, 2010; Font, Godino, Planas, & Acevedo, 2010). Solche Theorien sind in der Lage, zu bestimmen, was unter den mathematischen Objekten zu verstehen ist, wie diese entstehen und entstanden sind und wie wir Menschen lernen, mit ihnen umzugehen. Wer beispielsweise Mathematik als soziale Praxis versteht, vertritt einen anthropologischen Ansatz, denn er geht in der Regel von historisch gewachsenen – und damit von uns Menschen geprägten – Normen aus. Aus dieser Sichtweise hat sich der Umgang mit mathematischen Begriffen im Laufe der Kulturgeschichte entwickelt, insbesondere die Art und Weise, solche Begriffe als Objekte zu behandeln. Lernen von Mathematik wird zur aktiven Teilnahme an mathematischen Praktiken, in denen der Lernende den mathematischen Objekten begegnet, die in diese Praktiken involviert sind.

Als Beispiel werden ein weiteres Mal die Arbeiten von Radford rezipiert (vgl. auch Abschnitt 1.2.6). In seiner semiotisch-pragmatischen Theorie des mathematischen Lernens ist die *Objektifizierung* von Begriffen zentral (Radford, 1998, 2002, 2003, 2005, 2006, 2008, 2010a). Er versteht darunter die Bewusstwerdung von Begriffen: Lernende müssen sich des mathematischen Objekts „bewusst“ werden (Radford, 2005, S. 116), sie „begegnen“ einem anderen, dem kulturellen Objekt („encounter with the other and cultural objects“, Radford, 2008, S. 225) respektive machen sich etwas „erkennbar“ („make something apparent“, Radford, 2006, S. 2). Zur Unterstützung dieser Bewusstwerdung bedienen sich Lehrende wie Lernende semiotischer Mittel der Objektifizierung wie Zeichen, Wörter, Gesten, rhythmischen Bewegungen etc. wie in Abschnitt 1.2.6 kurz vorgestellt. Wesentlich nun ist, dass Radford jede Art und Weise der Begegnung, der Bewusstwerdung, als Objektifizierung bezeichnet. Konsequenterweise erhält er verschiedene Ebenen („layers“, Radford, 2006, S. 5), Schichten („stratum“, Radford, 2003, S. 60) von objektifizierenden Tätigkeiten, abhängig davon, welche semiotischen Mittel die Lernenden verwenden. (In Abschnitt 1.2.6 sind drei Typen der Verallgemeinerung vorgestellt, die faktische, kontextuelle und symbolische. Diese drei Typen repräsentieren drei Ebenen respektive Schichten von objektifizierenden Tätigkeiten.)

Der Ansatz von Radford postuliert keine Entwicklung von der Behandlung eines Terms als Prozess hin zum Objekt. Einerseits ist dem wohl so, weil Radford stark auf die Algebraisierung und somit auf die Verbindung der internen und externen Semantik fokussiert. In seinen Studien untersucht er nie nur die interne – und dabei die kalkülorientierte – Bedeutung. Andererseits betont Radford die Abhängigkeit der objektifizierenden Tätigkeiten vom situativen Kontext, in denen Begegnungen mit dem mathematischen Begriff stattfinden. Das schließt eine starre Entwicklungslogik, wie sie die Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze vertreten, aus.

Luis Radfords Konzeption ist in den Fundamenten ganz ähnlich zur Lerntheorie der spanischen Forschungsgruppe um Leute wie Carmen Batanero, Vincenc Font und Juan Godino. Für sie gleicht die Objektifizierung eines mathematischen Begriffs der Emergenz (und *nicht* der Konstruktion) eines „globalen Referenten“ (Font, Godino & Gallardo, 2013, S. 119), auf den spezifische Gebrauchs- und Sprechweisen verweisen.

2.5.6 Fazit

Die Behandlung eines Terms als Prozess respektive als Objekt korrespondiert mit zwei verschiedenen Fähigkeiten. Inwiefern sich die eine Fähigkeit aus der anderen entwickeln muss, scheint in der Mathematikdidaktik ungeklärt. Es existieren weder eindeutige empirische Belege (etwa aus einer Längsschnittstudie) noch zwingende theoretische Argumente (etwa durch Angabe eines Modells), welche diese Frage eindeutig beantworten würden.

Die hier referierten Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze lassen sich grundsätzlich in zwei Sichtweisen einteilen. Aus kognitionspsychologischer Sicht ist typischerweise die Bildung von Schemata höherer Ordnung gemeint (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991). Auch Aebli (1980, 1981) vertritt diese Vorstellung, er spricht in diesem Fall vom *Objektivieren* eines Begriffs und meint damit ein Vergegenständlichen. Steiner (1991) hingegen verwendet den Begriff des *Verdichtens*. Aus diskursiver respektive pragmatischer Sicht entspricht die Bildung von Objekten hingegen der Möglichkeit, über etwas sprechen zu können. Damit ist gemeint, dass der mathematische Begriff so verwendet wird, als ob er etwas repräsentiere, nämlich das entsprechende mathematische Objekt (Sfard, 2008). Einen Term als Objekt zu behandeln lernen, heißt aus dieser Sicht lernen, explizit zu machen, was man mit ihm macht.

Alternative Ansätze teilen mit den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen das Ziel, dass die algebraische Expertise in der Behandlung von Termen als Objekte besteht. Sie postulieren aber nicht, dass dieses Ziel durch die wie auch immer geartete Transformation von Prozessen zu Objekten erreicht wird. Denn diese Ansätze gehen davon aus, dass der situative Kontext (mit)bestimmt, mit welchen semiotischen Mitteln Lernende den Termen begegnen. So fokussieren die entsprechenden Forschungsarbeiten auf diese semiotischen Mittel (Zeichen, Wörter, Gesten, rhythmische Bewegungen etc.) und welche Lernprozesse sie ermöglichen.

Interessant ist aber, dass der diskursive Ansatz von Sfard (2008) erstens eine Entwicklungsrichtung von der Behandlung eines Ausdrucks als Prozess hin zum Objekt befürwortet und zweitens durchaus kompatibel mit obigen alternativen Ansätzen ist, wie etwa explizit in Font, Godino und Gallardo (2013) festgehalten ist. Auch die vorgelegte Arbeit nimmt eine semiotisch-pragmatische Sichtweise ein und wird in Abschnitt 6.3.5 für eine Entwicklungsrichtung beim Strukturieren votieren, die allerdings über das enge Korsett der Prozess-Objekt-Dichotomie hinausgeht. Ein wesentliches Argument wird sein, dass Lernende Terme nicht nur als Prozesse, sondern vor allem auch als Verfahren behandeln können. Dabei ist es entscheidend, solche Behandlungsweisen als Manipulationen am selben Objekt zu verstehen. Als zentrale Hypothese wird formuliert, dass durch das Umstrukturieren eines algebraischen Ausdrucks ein solches Objekt generiert wird.

Mithilfe der empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) ist nun aber zuerst zu klären, welche Kategorien von Strukturierungen von Personen überhaupt hergestellt werden. Welche Kategorien lassen sich identifizieren und voneinander trennen? Wie lassen sich diese Kategorien charakterisieren? Bestehen Zusammenhänge zu den unterschiedlichen Behandlungsweisen von Termen? Welche? Erst nach der Beantwortung dieser Fragen kann in Kapitel 6 die Theorie weiter vorangebracht und die Frage nach der Entwicklung des Strukturierens bearbeitet werden.

2.6 Zusammenfassung der Resultate

Das Ziel der theoretischen Überlegungen war die Bestimmung eines Begriffs des individuellen Strukturierens respektive einer individuell hergestellten Struktur sowie dessen Fundierung in mathematikdidaktischen Ansätzen. Die wesentlichen Erkenntnisse und Festlegungen seien im Folgenden zusammenfassend dargestellt.

1. Als theoretische Sichtweise wird ein semiotisch-pragmatischer Ansatz (Abschnitt 1.2.6) gewählt. Es interessiert somit der materiell vorliegende algebraische Ausdruck – und nicht seine allfällige interne Repräsentation – und wie eine Person diesen Ausdruck handhabt, wenn sie sich einen Reim auf ihn machen will, um ihn umformen zu können.

2. Die Handhabung des Ausdrucks wird als ein Aufeinanderbeziehen von Teilen des Ausdrucks bestimmt; das wird als Strukturieren verstanden (Abschnitt 2.2.1). Eine Strukturierung ist dann als Produkt dieses Prozesses des Strukturierens definiert.

3. Die Bedeutung einer Strukturierung ist definiert als ihre personale (pragmatische) Bedeutung (Abschnitt 2.3.3). Also ist sie gleich der Verwendungsweise der hergestellten Strukturierung durch die einzelne Person. Diese Verwendungsweise wird als die Frage danach verstanden, wann die Person den Ausdruck genau so strukturiert. Damit wird der Prozess des Strukturierens, in den die Strukturierung eingebettet ist, mit der Bedeutung der Strukturierung gleichgesetzt.

4. Die Beschreibung des Strukturierens wird gleich der Angabe von Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung (Wann), der Strukturierung (Wie) und der Konsequenz festgelegt (Abschnitt 2.4). Damit beschreiben die Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung gerade die Bedeutung der Strukturierung.

5. Zur Erklärung der Entwicklung der algebraischen Expertise beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen bieten sich Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze (Abschnitt 2.5.4) und alternative, semiotisch-pragmatische Ansätze (Abschnitt 2.5.5) an. Welche dieser Ansätze sich zur Beschreibung der Entwicklung des Strukturierens eignen, kann erst nach den empirischen Studien (Kapitel 4 und 5) geklärt werden.

3 Methode der empirischen Studien

Inhalt dieses Kapitels ist die Beschreibung und Begründung des Designs der empirischen Studien, die in Kapitel 4 und 5 vorgestellt werden. Die Überlegungen schließen an die Erkenntnisse aus Kapitel 2 an. Ausgangspunkt jenes Kapitels war die Forschungsfrage nach der theoretischen Fundierung und Entwicklung des Begriffs des (individuellen) Strukturierens und der Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks. Diese Frage wurde präzisiert, indem eine semiotisch-pragmatische Sichtweise eingenommen wurde. Dann liegt das Interesse auf den materiell gegebenen Zeichen im algebraischen Ausdruck und darauf, wie eine Person diese handhabt, das heißt, welche Bedeutung sie ihnen zuweist, wenn sie den Ausdruck im Hinblick auf eine Umformung anschaut. Diese Handhabung der Zeichen beim „Lesen" des Ausdrucks wurde in Kapitel 2 als die Herstellung von Bezügen festgelegt und dies gleich dem Strukturieren gesetzt. Strukturieren ist ein Aufeinanderbeziehen der Teile des Ausdrucks und das Produkt dieses Prozesses ist die Strukturierung. Also lautet die Frage so: Wie kann die Herstellung solcher Bezüge empirisch erfasst werden?

Dieser Prozess des Herstellens von Bezügen ist in Abschnitt 2.4 in Anwendbarkeitsbedingung, Konsequenz, Strukturierung und Abschlussbedingung zerlegt. Die Wahl dieser vier Komponenten gründet in der Konzeption der Bedeutung der Strukturierung. Die Anwendbarkeits- und die Abschlussbedingung beschreiben, wann eine bestimmte Person so strukturiert. Die Strukturierung beschreibt gerade, wie sie strukturiert. Die Konsequenz ermöglicht die Erfassung der Abschlussbedingung. Insgesamt beschreiben diese vier Komponenten den Prozess des Strukturierens, indem sie die Strukturierung und ihre Bedeutung („operationalisiert" als Wann und Wie) umfassen. Die hier gewählte Beschreibung der Bedeutung einer Strukturierung wird als Beschreibung des Prozesses des Strukturierens verstanden durch die Angabe von Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung. Somit kann die Frage präzisiert werden: Wie können Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung empirisch erfasst werden?

Jede Antwort auf diese Frage hängt von den konkreten Rahmenbedingungen (Stand der Forschung, Forschungsinteresse etc.) der durchzuführenden empirischen Studien ab. Welche Rahmenbedingungen für die vorgelegte Arbeit entscheidend waren und welche Konsequenzen sich daraus ergaben, sei nun im Folgenden dargelegt.

3.1 Wahl der Methode

Am Anfang steht die Klärung der Methode. Welche Methode bietet sich zur Erfassung von Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung, Strukturierung und Konsequenz an? Diese Frage wird aus zwei Perspektiven beantwortet. Einmal aus der Perspektive von entscheidenden Rahmenbedingungen (Abschnitt 3.1.1), einmal aus der Perspektive von eigenen, früheren Arbeiten (Abschnitt 3.1.2).

3.1.1 Rahmenbedingungen

Folgende drei Rahmenbedingungen sind hier für die Wahl der Methode von entscheidender Bedeutung.

1. Mit der Erfassung von Strukturierungen algebraischer Ausdrücke und der Prozesse des Strukturierens wird empirisch ein neues Feld eröffnet. Also dient eine entsprechende Untersuchung der Exploration und Hypothesenbildung.

2. Die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung, Strukturierung und Konsequenz spiegeln den individuellen Zugang zum Ausdruck. Es geht also um die Erfassung individueller und damit oftmals unfertiger Konzeptionen und Vorgehensweisen inklusive ihrer jeweils eigenen, inneren Logik. Eine potentielle Methode muss Antworten auf folgende Fragen ermöglichen: Welche Handlungsmuster aktivieren Personen aufgrund welcher Beobachtungen beim Lesen algebraischer Ausdrücke? Welche Bezüge resultieren daraus? Welche Konsequenzen ziehen sie? Wie beurteilen sie diese?

3. Die Gliederung des Prozesses des Strukturierens in Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung bedingt Daten über diese vier Komponenten. Um diese Komplexität adäquat beschreiben zu können, müssen die Daten entsprechend differenziert ausfallen.

Aufgrund der ersten Rahmenbedingung kommt nur eine qualitative empirische Untersuchung in Frage. Denn wo die quantitativen Forschungsinstrumente auf die Überprüfung von Hypothesen zugeschnitten sind, sind es die qualitativen auf deren Bildung (Beck & Jungwirth, 1999; Beck & Maier, 1993; Jungwirth, 1998; Lamnek, 2005).

Die zweite Rahmenbedingung legt die Erhebung verbaler Daten nahe. Allein durch die Beobachtung einer Person, die gerade algebraisch umformt, sind ihre subjektiven Zugangsweisen zu Termen und Gleichungen nicht rekonstruierbar.

Denn diese subjektiven Zugangsweisen sind dem Forscher nicht im Voraus bekannt, er muss sie eben gerade aus den erhobenen Daten generieren. Also müssen diese Daten Auskunft über die „Wirklichkeitsdefinition“ (Lamnek, 2005, S. 348) der Person geben. Das ist anhand verbaler Daten am einfachsten, da diese qualitativ am eindeutigsten interpretiert werden können. Genau darum bietet sich beispielsweise die Messung von Augenbewegungen erst in Folgestudien an. Erst wenn erste Hypothesen über Interpretationen algebraischer Ausdrücke gewonnen sind, erscheint die Untersuchung ihrer Auswirkungen auf die Augenbewegungen erfolgsversprechend.

Zusammen legen obige drei Rahmenbedingungen das Durchführen von qualitativen Interviews nahe. Denn diese liefern verbale Daten und durch gezieltes Nachfragen können differenzierte Aussagen gewonnen werden. Aus den so erhobenen Daten sind Rückschlüsse auf die je individuellen Behandlungsweisen der algebraischen Ausdrücke möglich. Damit wird eine Methode ausgezeichnet, die sich auch in anderen Bereichen als sinnvoll für die Erfassung von individuellen Konstrukten erwies. Beispielsweise nutzte Fischer (2006) Interviews zur Rekonstruktion von individuellen Vorstellungen von Begriffen der linearen Algebra, Striethorst (2002) zur Rekonstruktion von Regelvorstellungen, um prädikative und funktionale Strukturen zuordnen zu können, Söbbeke (2005) zur Rekonstruktion von Strukturierungen von Punktfeldern und Wittmann (2003) zur Rekonstruktion von Schülerkonzepten zu Begriffen der Analytischen Geometrie.

3.1.2 Eigene frühere Arbeiten

Die vorgelegte Arbeit kann als Weiterführung einer eigenen früheren Arbeit (Rüede, 2009) verstanden werden. In jener Arbeit wurde untersucht, welche Bruchtermgleichungen Experten respektive Novizen als ähnlich im Hinblick auf das Auflösen der Gleichung kategorisieren. Die Hypothese war, dass die generierten Kategorien wesentlich durch das Vorwissen bestimmt sind. Verwendet wurde ein Sortierverfahren, wo die befragten Personen zwanzig Bruchtermgleichungen nach ähnlichen Vorgehensweisen beim Lösen gruppieren mussten. Als Resultat wurden unterschiedliche Kategorisierungen von Experten und Novizen erhalten. Die Kategorien der Novizen orientierten sich tendenziell an syntaktischen Merkmalen im Unterschied zu jenen der Experten, die ausnahmslos den Verbindungen zwischen Teilen einer Gleichung folgen. Das heißt, die Kategorien der Novizen orientieren sich eher an Oberflächenmerkmalen, jene der Experten an Tiefenstrukturen.

Die Unterscheidung in Oberflächenmerkmale und Tiefenstrukturen geht auf die Studie von Chi, Feltovich und Glaser (1981) zurück. Insofern konnten die Resultate von Chi, Feltovich und Glaser (1981) bestätigt werden. Diese Studie war wegweisend für die Experten-Novizen-Forschung, da sie die Begriffe des

Oberflächenmerkmals und der Tiefenstruktur prägte. Ihr Gegenstand waren Physikaufgaben und sie untersuchte, wie Experten und Novizen diese Aufgaben lesen und dabei die interne Problemrepräsentation generieren. Auch Chi, Feltovich und Glaser benutzten ein Sortierverfahren. In einem zweiten Schritt nutzten sie aber Interviewtechniken, um den Prozess des Lesens – der Bildung der internen Problemrepräsentation – besser verstehen zu können.

Es besteht also eine Analogie zwischen den beiden Forschungsprozessen: So wie Chi, Feltovich und Glaser Interviews einsetzten, um die Resultate ihrer Sortierverfahren besser verstehen zu können, verwendet auch die vorgelegte Arbeit Interviews. Das Sortierverfahren liefert jeweils Kategorien. Diese sind das Ergebnis eines Prozesses. Bei Chi, Feltovich und Glaser ist es ein Leseprozess von Physikaufgaben, hier ist es ein Prozess des Strukturierens von algebraischen Ausdrücken (was eigentlich auch ein Lesen ist). Genau zur Untersuchung solcher Prozesse eignen sich Interviews.

3.2 Operationalisierung

Die Anwendbarkeitsbedingung, die Strukturierung, die Konsequenz und die Abschlussbedingung werden aus Interviewdaten rekonstruiert. Zur Planung der Interviews ist es nötig, diese Begriffe in dem Sinne zu operationalisieren, dass die im Interview zu stellenden Fragen formuliert werden können. Es geht also um die Klärung dessen, was im Interview konkret gefragt werden soll.

Die Anwendbarkeitsbedingung einer Strukturierung beschreibt, wann eine bestimmte Person so strukturiert – und sei es ihres Erachtens nur dazu, um zu prüfen, ob dies zu nutzbaren Konsequenzen führt. Einerseits umfasst die Anwendbarkeitsbedingung typische Handlungsmuster der Person, beispielsweise, wie sie algebraische Ausdrücke umformt und wie sie unter den Umständen, unter denen die Gleichung zu lösen ist, reagiert. Teile der Anwendbarkeitsbedingung werden andererseits auch ad hoc generiert, da die Person die vorgelegte Gleichung vermutlich noch nie gelöst hat – oder sich nicht mehr im Detail daran erinnert. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass wesentliche Aspekte der Anwendbarkeitsbedingung in der „Vorgeschichte“ der Strukturierung sichtbar werden. Diese Vorgeschichte beantwortet die Leitfrage der Anwendbarkeitsbedingung, nämlich, was die Person dazu führte, genau diese Strukturierung herzustellen und nicht eine andere. Damit ist sowohl eine Beschreibung der Chronologie dieser Vorgeschichte gemeint als auch eine Erklärung dieser Chronologie – aus Sicht der Person, die strukturierte. In den Interviews ist also erstens der Denkweg, der zur Strukturierung führte, zu erheben. Was machte und dachte die Person, bis sie so strukturierte? Zweitens sind die Absichten und Ziele, welche die Person verfolgte, zu erfragen. Welche Absicht verfolgte die Person mit ihrer Strukturierung? Warum hat sie gerade diese und nicht eine andere vorgenommen? Macht sie das immer so?

Die Anwendbarkeitsbedingung ist der eine Teil des Wann. Der andere Teil, die Abschlussbedingung, gliedert sich wiederum in Beschreibung und Erklärung davon, ob und warum die Person an der Strukturierung festhielt oder nicht. Zur Beschreibung dienen einerseits die Folgehandlungen der Person, zur Erklärung ihre Beurteilung dieser Folgehandlungen. Zusammen bilden diese zwei Teile die Operationalisierung der Anwendbarkeitsbedingung. Entsprechend sind sie im Interview zu erfragen.

Die Konsequenz kann direkt operationalisiert werden. Sie ist von rein beschreibendem Charakter und besteht in den Folgehandlungen inklusive den durch die Strukturierung ausgelösten Überlegungen.

Ebenso ist auch die Strukturierung direkt operationalisierbar. Sie besteht aus den Teilen des Ausdrucks, die aufeinander bezogen werden. In den Interviews wurde allerdings nicht direkt danach gefragt. Stattdessen wurde die Frage gestellt, worauf man geschaut habe. Denn es wurde davon ausgegangen, dass die Interviewten darauf eher eine Antwort geben können als auf die Frage, wie sie die einzelnen Teile aufeinander beziehen. Aus den entsprechenden Antworten sowie aus den in aller Regel umfassenden Schilderungen der Interviewten konnte die Strukturierung im Rahmen der Auswertung oftmals – aber leider nicht immer – rekonstruiert werden.

3.3 Design der Interviews

Im Folgenden ist beschrieben und begründet, welche Probanden gewählt wurden (Abschnitt 3.3.1), worauf bei der Konstruktion der Terme und Gleichungen geachtet wurde (Abschnitt 3.3.2), welche Interviewtechnik verwendet wurde (Abschnitt 3.3.3) und welcher Leitfaden sich daraus ergab (Abschnitt 3.3.4).

3.3.1 Probanden

Die Stichprobe wurde aus zweierlei Gründen möglichst vielfältig angesetzt. Erstens garantiert eine hohe Vielfalt in der Probandenstichprobe eine repräsentativere Kategorisierung. Denn Lamnek (2005, S. 188–189) konstatiert: „Einige wenige abweichende Fälle können die Theorieentwicklung weiter vorantreiben als große, repräsentative Stichproben, indem sie die Reichhaltigkeit, Tiefe und Breite der Daten gewährleisten (Witzel, 1982).“ Angestrebt war mehr eine hohe Typizität als eine hohe Repräsentativität. Zweitens braucht es zur Charakterisierung des Einzelnen sowohl den Vergleich mit dem Gleichartigen als auch die Abgrenzung vom Andersartigen. Dies ist besonders bei der

Bildung von Kategorien wichtig, denn diese müssen sich voneinander trennen lassen.

Zur Sicherung der Vielfalt wurden Kriterien aufgestellt. Erstens bestand die Stichprobe aus Experten und Novizen. Die Experten waren jeweils erfahrene Mathematiklehrpersonen eines Schweizer Gymnasiums, die insbesondere über ein universitäres Diplom in Mathematik verfügten und weitere Zusatzbedingungen erfüllten. Die Novizen waren Schülerinnen und Schüler. Zweitens wurden bei der Auswahl unterschiedliche Schulen und Leistungsniveaus berücksichtigt. Für die Details sei auf die Kapitel 4 und 5 verwiesen.

3.3.2 Form der Interviews

Die Interviews waren *aufgabenbasiert* (task-based). Insbesondere wurden die Interviewten zur Nennung von Umformungen aufgefordert, um entweder den vorgelegten Term zu vereinfachen oder die vorgelegte Gleichung zu lösen. Es wurde bewusst von Umformungen und nicht von Strukturierungen gesprochen, damit die befragten Personen die vorgelegten Ausdrücke tatsächlich hinsichtlich des Vereinfachens respektive Lösens anschauten. Allerdings wurde nach der Antwort der befragten Person im Interview immer als Erstes nachgefragt, worauf man geschaut habe.

Die Konstruktion der vorgelegten algebraischen Ausdrücke orientierte sich dabei an folgendem Kriterium: Sowohl bei den Novizen als auch bei den Experten sind Situationen zu erzeugen, in denen sie auch ad hoc Verfahren generieren müssen und nicht nur blindlings Verfahren ausführen. Dieses Kriterium basierte auf den folgenden zwei Überlegungen:

1. Die Studie geht von einem Begriff des Experten als *adaptiver* und nicht (bloß) *routinierter* Experte aus (Schwartz, Bransford & Sears, 2005). Ein adaptiver Experte ist dadurch charakterisiert, dass er neuartiges Wissen generieren respektive eine ungewohnte Perspektive einnehmen und nicht bloß Standardverfahren ausführen kann wie der so genannte routinierte Experte. Also sind den Experten auch unvertraute algebraische Ausdrücke vorzulegen.

2. Strukturierungen sind in der Auswertung ergiebiger, sobald sie nicht auf Automatismen beruhen. Die konstruierten Ausdrücke mussten also keineswegs den entsprechenden Schulstoff repräsentieren, sondern einzig und allein reichhaltige Daten produzieren. Analog forderte Fischer (2006, S. 69) für ihre Studie, dass „sie sich an den Grenzen der Leistungsfähigkeiten der Probanden beweg[t], so dass diese sich auf das unsichere Terrain ihrer noch nicht gefestigten Vorstellungen begeben".

Also waren algebraische Ausdrücke zu konstruieren, welche für Experten ungewohnt und für Novizen neu aber bewältigbar, waren. Die Wahl für die erste Studie fiel auf Bruchterme und Bruchtermgleichungen, und zwar aus vier Gründen. Erstens sind in solchen „zweidimensionalen“ Ausdrücken sowohl horizontale als auch vertikale sowie diagonale Bezüge möglich. Das Spektrum der hergestellten Bezüge ist also groß. Zweitens sollten den Interviewten keine lapidaren Ausdrücke wie etwa $27 + 3x = 0$ vorgelegt werden, sondern solche, wo Strukturierungsarbeit wesentlich und die Auswertung folglich ertragreich ist. Drittens sind Bruchterme und Bruchtermgleichungen mit Standardverfahren verbunden. Die Addition von Bruchtermen ruft beispielsweise das Gleichnamigmachen der Nenner hervor oder eine Bruchtermgleichung das Wegmultiplizieren der Nenner. Es ist daher einfach, algebraische Ausdrücke zu konstruieren, die auf den ersten Blick ein Standardverfahren evozieren, das mühsam wird und daher eines zweiten Blicks bedarf, der dann auf einen simplen Trick führt. Viertens konnte von der Erfahrung profitiert werden, die in Rüede (2009) gesammelt wurde. In jener Studie wurde ebenfalls mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen gearbeitet. Insgesamt folgten auch andere Studien zur Untersuchung des Strukturierens ganz ähnlichen Kriterien bei der Konstruktion von Aufgaben, vgl. etwa Bokhove und Drijvers (2010) und Wenger (1987).

Das Resultat der Aufgabenkonstruktion sind die unten angegebenen sieben Ausdrücke, drei zu vereinfachende Terme und vier nach x aufzulösende Gleichungen.

$$\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$$

$$\frac{6x^3 + 9x^2}{4x+6}$$

$$\frac{6+12x}{6x+2} + \frac{12x+2}{6x+2}$$

$$\frac{20x^3 + 30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}\right) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$$

$$\frac{x+1}{3x+1} + \frac{2x}{3x+1} = x^2$$

$$\frac{3x^2 - 18}{2x^2 - 12} = x - \frac{3x^3 - 18x}{x^2 - 6}$$

Obige Terme und Gleichungen waren Grundlage der ersten Studie (Kapitel 4). Für die zweite Studie wurden lineare Gleichungen konstruiert. Einerseits konnten so auch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I befragt werden. Andererseits wurde durch den Einbezug eines anderen Gleichungstyps überprüft, inwiefern die Ergebnisse der ersten Studie von den vorgelegten Bruchtermen und Bruchtermgleichungen abhängen. Auch die Aufgaben der zweiten Studie wurden so konstruiert, dass sowohl Novizen als auch Experten nicht bloß ein Standardverfahren verwenden wie etwa das Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Isolieren der Unbekannten x, sondern dass sie auch ad hoc nach alternativen Strukturierungen suchen. Die Wahl fiel auf die folgenden drei Gleichungen:

$$13(x - 6) + 15 = 15$$

$$7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$$

$$4(3x + 9) = (7x - 2) \cdot 18 - 18(7x - 2)$$

Alle drei Gleichungen sind linear. Die erste kann aber als spezieller Typ begriffen werden: Ein Produkt (und zwar $13(x - 6)$) ist Null. Sie wurde auch aus curricularen Gründen berücksichtigt. Die in der zweiten Studie befragten Novizen waren Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I. Sie waren zum Zeitpunkt der Befragung nahezu ausschließlich mit linearen Gleichungen vertraut, außer ein paar wenigen Beispielen von sogenannten „Null-Gleichungen“ wie $(x + 2)(x - 3) = 0$ oder $4(2x - 10) = 0$. Um zu erheben, wie sie lineare Gleichungen behandeln, wurde auch eine solch spezielle Gleichung aufgenommen, bei der auch die einzelnen Faktoren gleich Null gesetzt werden können. Die Entscheidung fiel auf $13(x - 6) + 15 = 15$.

In einem gewissen Sinne orientierte sich diese Wahl am Konzept des Gegenbeispiels. Beispielsweise votieren Hischer und Lambert (2003, S. 150) dafür, neben Beispielen auch Gegenbeispiele als wichtig für die Begriffsbildung zu erachten, denn „es gehört unverzichtbar dazu, den *Begriffsumfang mit Hilfe von Beispielen und Gegenbeispielen* exemplarisch zu konkretisieren und abzugrenzen“. Aus diesem Grund wurden die Sekundarschülerinnen und Sekundarschüler auch mit einer „versteckten Null-Gleichung“ konfrontiert, um vor allem den Anwendungsbereich ihres Standardverfahrens für lineare Gleichungen besser einschätzen zu können.

3.3.3 Methodisch-technische Aspekte der Interviews

Die erste Studie nutzte die Technik des nachträglichen lauten Denkens, die zweite jene des lauten Denkens. Die Begründung dieser Wahl ist Gegenstand dieses Abschnitts.

Bei der Methode des lauten Denkens wird die befragte Person aufgefordert, während der Aufgabenbearbeitung über ihre Gedanken und Überlegungen zu berichten (Ericsson & Simon, 1980; Weidle & Wagner, 1982). Im Idealfall beginnt die befragte Person gleich nach der Präsentation der Problemstellung laut zu denken und wird dabei von der interviewenden Person nicht unterbrochen. Das so entstandene Protokoll bildet das empirische Material. Ein Vorteil des lauten Denkens ist die Authentizität der Gedanken. Die Äußerungen der befragten Person sind Bestandteil ihres tatsächlichen Denkwegs. Sie weisen zudem tendenziell eine relativ hohe Reproduzierbarkeit auf. So berichtet Ericsson (2006, S. 227–228) über eine Person, die im Abstand von einer Woche zweimal laut 36 mal 24 vorrechnete. Die beiden Protokolle waren inhaltlich identisch und sogar im Wortlaut sehr ähnlich. Es ist aber anzunehmen, dass die Reproduzierbarkeit vom Inhalt und von der Expertise der befragten Person abhängt. Beispielsweise ist beim Kopfrechnen und allgemein bei der mentalen Mathematik das Spektrum der Lösungswege riesig, sobald es sich um unvertraute Situationen handelt (Threlfall, 2002; Proulx, 2013). Ebenso ist das Fehlerverhalten nicht bei jeder Person konstant (Linchevski & Livneh, 2002; Stahl, 2000; Wittmann, 2013). Aufgrund dieser Fakten ist beim lauten Denken davon auszugehen, dass nicht alle verbalen Daten immer gleich gut reproduzierbar sind. Ein entscheidender Nachteil des lauten Denkens ist auch die Doppelbelastung von Sprechen und Denken. Das laute Denken beeinflusst den Denkprozess, es kann den Denkfluss behindern und von üblichen Denkwegen ablenken. Besonders bei unvertrauten Problemstellungen kann dies hinderlich sein.

Die in dieser Arbeit vorgestellten zwei Studien nutzten das laute Denken. Allerdings basierte die erste Studie (Kapitel 4) auf einer Variante davon, nämlich auf dem sogenannten nachträglichen lauten Denken (Wagner, Uttendorfer-Marek & Weidle, 1977) respektive „stimulated recall“ (Lyle, 2003) – vgl. auch Hadamard (1945) für einen für die Mathematikdidaktik wegweisenden Einsatz dieser Technik. Der befragten Person wurde beispielsweise eine Gleichung vorgelegt mit der Bitte, eine gewinnbringende Umformung vorzuschlagen. Entscheidend hierbei war die unbeschränkte Bedenkzeit, welche der Person zugestanden wurde. Erst nachdem die Person einen Vorschlag gemacht hatte, wurde sie zum Berichten ihrer Überlegungen aufgefordert, die sie sich während der Bedenkzeit gemacht hatte. Der Nachteil eines solchen nachträglichen lauten Denkens ist die Unsicherheit über die Validität der nachträglich verbalisierten Gedanken (Ericsson & Simon, 1980). Beschreibt die Person ihren

Denkweg korrekt? Der Vorteil ist hingegen die Authentizität des Denkprozesses während der Bedenkzeit, der nicht durch den Zwang zum lauten Denken verfälscht werden kann. Um den Nachteil der möglicherweise geringen Validität der verbalen Daten beheben zu können, wurden dann in der zweiten Studie (Kapitel 5) die Personen zum lauten Denken aufgefordert.

Nach dem lauten respektive nachträglichen lauten Denken wurden der befragten Person in beiden Studien zu jeder Aufgabe spezifische Fragen gestellt, um den Denkprozess möglichst umfassend schon während des Interviews rekonstruieren zu können. Grundlage dafür war jeweils ein Leitfaden, der im folgenden Abschnitt skizziert wird.

Die beiden Studien unterscheiden sich auch in den Hilfsmitteln, welche die befragten Personen nutzen konnten. In der ersten Studie (Kapitel 4) durften die befragten Personen keine Hilfsmittel nutzen. In diesem Sinn entstand für die befragten Personen ein Zwang, den vorgelegten Ausdruck anzuschauen und ihn nicht einfach umzuformen. Analog untersagten auch Chi, Feltovich und Glaser (1981) in ihren Interviews die Benutzung von Papier und Bleistift. Der Verzicht auf Papier und Bleistift sollte zu einem ähnlichen Anschauen wie bei einem Sortierverfahren führen. Die Interpretation des vorgelegten Ausdrucks in der Form der hergestellten Bezüge ist dabei wichtig und genau diese waren Untersuchungsgegenstand. In der zweiten Studie (Kapitel 5) waren hingegen Papier und Bleistift zugelassen.

3.3.4 Leitfaden

Alle Interviews waren halbstrukturiert. Der Leitfaden der beiden Studien war ähnlich, aber nicht gleich. Zu Beginn der Interviews wurde die befragte Person über den Interviewverlauf und die Rahmenbedingungen informiert. In der ersten Studie wurde sie beispielsweise über das Verbot jeglicher Hilfsmittel oder die beliebig lange Bedenkzeit aufgeklärt. Nach solchen Erklärungen wurde die erste Aufgabe vorgelegt. In der ersten Studie war dies ein Bruchterm, verbunden mit der Aufforderung, sich eine vereinfachende Umformung zu überlegen. Die anschließende Bedenkzeit bewegte sich im Rahmen von etwa zwei Sekunden bis zwei Minuten, abhängig von der Person und vom Ausdruck. Sobald die Person einen Vorschlag gemacht hatte, wurde sie zur nachträglichen Schilderung ihrer Gedanken aufgefordert, die zu diesem Vorschlag geführt hatten. In der zweiten Studie wurde der Person analog eine nach x aufzulösende Gleichung mit der Bitte vorgelegt, zu sagen, was man sieht. Hier begann die Person direkt, laut zu denken. Unterbrach sie ihren Bericht länger als drei Sekunden, folgte eine Bitte, ihre Überlegungen zu verbalisieren zu versuchen.

Nach dieser ersten Phase wurden spezifische Fragen gestellt, um die geschilderten Gedanken und Beobachtungen anzureichern und den Denkweg gemeinsam präziser zu rekonstruieren. Dieses Nachfragen diente dem Sammeln von Informationen über die Anwendbarkeitsbedingungen, Bezüge, Konsequenzen und Abschlussbedingungen der berichteten Strukturierungen. Wenn nötig, wurde die befragte Person auch gebeten, ihre vorgeschlagene Umformung weiterzuverfolgen – um zum Beispiel Auskunft über etwaige Abschlussbedingungen zu erhalten.

Mit dieser Phase der gemeinsamen Rekonstruktion der hergestellten Strukturierung endete in der ersten Studie die Befragung zum vorgelegten Bruchterm. Dann folgte der zweite und dritte Bruchterm. Schließlich wurden die vier Bruchtermgleichungen ausgegeben, wobei hier die Frage nach einer gewinnbringenden Umformung gestellt wurde. In der zweiten Studie hingegen wurde nach der Phase der gemeinsamen Rekonstruktion um alternative Umformungen der vorgelegten Gleichung gebeten. Es wurde also gezielt nach einem Perspektivenwechsel gefragt (vgl. Details im Kapitel 5). Erst nachdem die damit verbundenen Strukturierungen geklärt waren, ging man zur zweiten und dann zur dritten Gleichung über. Im Schnitt dauerte in beiden Studien ein Interview etwa 50 Minuten.

3.4 Auswertung

Die Auswertung folgte grundsätzlich der zusammenfassenden Inhaltsanalyse (Mayring 2003, S. 59–76) und nutzte für die konkrete Ausführung zusätzlich auch Techniken, die im Rahmen des Konzepts der didaktischen Rekonstruktion entwickelt wurden, wie etwa in Gropengiesser (2007, S. 142–147) beschrieben. Im ersten Schritt wurden alle Passagen transkribiert. Weil die Interviews in Schriftdeutsch durchgeführt wurden, mussten keine Dialekte bereinigt werden. Satzbaufehler wurden übernommen. Das so entstandene Wortprotokoll wurde nach den Transkriptionsregeln in Gropengiesser (2007, S. 147) kommentiert. Zur Illustration sei ein Auszug aus einem Transkript gegeben. Thema war die Gleichung $\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}\right) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$, I steht für die interviewende Person, S für die befragte Schülerin.

I Wie haben Sie die Gleichung gelesen?

S Zuerst habe ich die Klammer angeschaut. Dann $\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$. Habe überlegt, ob ich die 4 wegstreichen könnte. Dachte, ja, so – – –

I Was würde dann stehen, wenn Sie die 4 wegstreichen könnten?

S $1 - x$.

I Alleine. Ja.

S Aber das geht ja nicht, weil das in Viertel aufgeteilt ist und die x eine beliebige Zahl sein kann. Und das sind dann so viele Anzahl Viertel und nicht so viele Anzahl Ganze. Das wäre dann falsch. Habe gedacht, nein, kann man nicht, lasse ich mal stehen.

⋮

I Suchen Sie eigentlich immer nach Gleichheiten innerhalb einer Gleichung?

S Ja *(lacht)*.

I Ist das immer so?

S Ja.

I Das können irgendwelche Gleichheiten sein?

S Ja.

I Haben Sie auch eine Strategie, die Sie verfolgen mit diesen Gleichheiten?

S Ja, das Wegstreichen. Aber das ist immer so eine heikle Sache.

⋮

I Und warum wollen Sie es so machen?

S Weil es dann einfacher wird.

Im zweiten Schritt wurden die Transkripte geordnet und dann redigiert. Einerseits bestand dieses Ordnen im Identifizieren der wesentlichen Strukturierungen. Pro befragte Person und Aufgabe wurden im Schnitt zwei bis drei Strukturierungen als zentral identifiziert. Andererseits wurden die Transkripte „aufgebrochen": Für jede zentrale Strukturierung wurde nach Informationen über die Anwendbarkeitsbedingung, die hergestellten Bezüge, die Konsequenz und die Abschlussbedingung gesucht. Das führte zu einem Umstellen der Transkripte so, dass für jede Strukturierung das Schema in Abschnitt 2.4.2 mit entsprechenden Passagen so weit wie möglich ausgefüllt werden konnte. Dabei wurden gewisse Passagen gegebenenfalls mehreren Stellen zugeordnet. Beispielsweise waren einzelne Passagen relevant für mehr als eine Strukturierung oder sie waren bei der Bedeutung einer Strukturierung etwa sowohl für die Konsequenz als auch für die Abschlussbedingung wichtig. Zu erwähnen ist, dass dieser Schritt des Ordnens ein Interpretieren ist. Nicht nur das Zuordnen der Passagen zu den einzelnen Stellen ist eine Frage der Interpretation, sondern auch das Einteilen in wichtige und unwichtige Information. Denn bestimmte Interviewausschnitte wurden keiner Strukturierung zugeordnet. Zum Beispiel machten einige Experten Angaben zum Definitionsbereich der vorgelegten Ausdrücke. Die entsprechenden Aussagen wurden beim Ordnen aber nur dann berücksichtigt, wenn sie explizit das Strukturieren im Hinblick auf das Umformen beeinflussten.

Der dritte Schritt war das Redigieren der zugeordneten Passagen. Füllwörter und -sätze sowie unmittelbare Wiederholungen wurden gestrichen. Die im Wechselspiel zwischen interviewende und interviewte Person entstandenen Passagen wurden in eigenständige Aussagen der interviewten Person transformiert. Diese Aussagen wurden dann grammatisch geglättet und, falls bedeutungsgleich, gebündelt. Dabei wurde auf einen authentischen Wortlaut geachtet. Die so erhaltenen Anwendbarkeitsbedingungen, Strukturierungen, Konsequenzen und Abschlussbedingungen bildeten die Basis der Kategorienbildung. Obiger Interviewausschnitt führte beispielsweise zum folgenden Schema:

Anwendbarkeitsbedingung: „Zuerst habe ich die Klammer angeschaut. Dann $\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$. Habe überlegt, ob ich die 4 wegstreichen könnte.“ Ich suche zuerst immer nach Gleichem, „weil es dann einfacher wird“. Meine Strategie ist das „Wegstreichen, aber das ist immer so eine heikle Sache“.

Strukturierung: Bezug zwischen den beiden gleichen Nennern.

Konsequenz: Wenn ich die beiden 4 wegstreichen würde, dann stände $1 - x$.

Abschlussbedingung: „Aber das geht ja nicht, weil das in Vierteln aufgeteilt ist und die x eine beliebige Zahl sein kann. Und das sind dann so viele Anzahl Viertel und nicht so viele Anzahl Ganze. Das wäre dann falsch. Habe gedacht, nein, kann man nicht, lasse ich mal stehen.“

Dabei sind wörtliche Interviewpassagen in Anführungs- und Schlusszeichen gesetzt. Die restlichen Wendungen sind Paraphrasierungen von Interviewpassagen. Insgesamt entspricht ein derart ausgefülltes Schema den *geordneten und redigierten Aussagen* im Sinne von Gropengiesser (2007) und ist im Folgenden auch so bezeichnet.

Im vierten Schritt wurden jene Verfahren identifiziert, die von den Novizen und Experten explizit beschrieben wurden (vgl. Kapitel 4 und 5). Diese Information war vor allem für die Kategorisierung im fünften Schritt wichtig, da sie die Interpretation mancher Anwendungsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung erleichterte. Mögliche implizite Vorgehensweisen wurden nicht als Verfahren behandelt, obwohl gerade Fehler teilweise auf algorithmisierbaren, falschen Prozeduren beruhen. Die Interviews waren aber nicht auf die Klärung dieser Frage ausgerichtet.

Diese vier Auswertungsschritte waren in beiden Studien dieselben. Der fünfte Schritt hingegen diente in der ersten Studie der Bildung eines Kategoriensystems und in der zweiten (bloß) dem Einordnen in Kategorien (und allfälligem Präzisieren und Ergänzen der Kategorienbeschreibung). Bei der induktiven Bildung von Kategorien des Strukturierens wurde dabei folgendermaßen vorgegangen: Zuerst wurden typische Strukturierungen ausgelesen, die als Ankerbeispiele dienten und deren Merkmale explizit gemacht wurden. Vorläufige Kategorien entstanden. Danach wurde untersucht, inwiefern die restlichen Strukturierungen diesen Kategorien zugeordnet werden können, wodurch die vorläufigen Kategorien teilweise revidiert werden mussten. Dieses Wechselspiel zwischen der Bildung von Kategorien und der Zuordnung der Strukturierungen dauerte so lange, bis möglichst viele Strukturierungen zugeordnet werden konnten und die Kategorien die Menge der Strukturierungen möglichst „angemessen“ charakterisierten. Zur Einschätzung dieser Angemessenheit wurde das Kategoriensystem mit bestehenden mathematikdidaktischen Theorien zum algebraischen Umformen verglichen. Das Resultat in Form von vier Kategorien ist in Kapitel 4 vorgestellt. Eine Ergänzung der Kategorienbeschreibung ist in Kapitel 5 gegeben.

Zu erwähnen ist, dass jene Strukturierungen, die der Ausführung eines Verfahrens dienten, für die Kategorienbildung wenig ergiebig waren. Sie waren wie erwartet schwieriger in einzelne Kategorien aufzuteilen. Die Verfahren gaben so stark vor, wie die Teile eines Ausdrucks aufeinander zu beziehen sind, dass eine qualitative Unterscheidung der entsprechenden Strukturierungen aufgrund der verbalen Daten nicht immer eindeutig durchzuführen war und sie daher auch nicht in jedem Fall kategorisiert werden konnten. Das war aber nicht problematisch, weil das Ziel der ersten Studie die Kategorienbildung und nicht die vollständige Kategorisierung der Bezüge war.

Dieses Kategoriensystem wurde dann durch die fünfte Studie validiert, indem die dort vorgenommenen Strukturierungen kategorisiert wurden. Ziel war die Überprüfung, inwiefern es weitere Kategorien zu postulieren gilt, inwiefern die Kategorienbeschreibung vollständig ist und inwiefern die in der ersten Studie generierten Kategorien von den ausgewählten Aufgaben unabhängig sind. Dazu wurde untersucht, ob sich die in der zweiten Studie identifizierten Strukturierungen diesen vorgegebenen Kategorien zuordnen lassen.

4 Erste Studie: Bruchterme und Bruchtermgleichungen

In der ersten Studie wurden Experten und Novizen über ihren Prozess des Strukturierens von Bruchtermen und Bruchtermgleichungen im Rahmen von Interviews befragt. Das Ziel der Studie ist eine möglichst umfassende empirische Beschreibung dessen, wie Experten und Novizen Bruchterme und Bruchtermgleichungen strukturieren. Die explizite Forschungsfrage gliedert sich in drei Teile:

1. Welche Kategorien von Prozessen des Strukturierens von Bruchtermen und Bruchtermgleichungen lassen sich empirisch begründen?

2. Strukturieren zwei Experten denselben Bruchterm respektive dieselbe Bruchtermgleichung gleich oder unterschiedlich?

3. Worin unterscheiden sich die von Experten und Novizen vollzogenen Prozesse des Strukturierens?

Die erste Frage untersucht die empirische Ausprägung des Prozesses des Strukturierens respektive der Bedeutung der Strukturierung. Insbesondere interessieren die unterschiedlichen Typen respektive Kategorien. Zu erwähnen ist, dass die Bildung solcher Typen sicher abhängig davon ist, ob ein Experte oder ein Novize interviewt wird. Daher interessiert auch, inwiefern sich Experten und Novizen beim Strukturieren unterscheiden. Das ist in der dritten Frage explizit formuliert.

Der Einbezug von Experten und Novizen hat zwei Gründe. Erstens garantiert dies eine hohe Varianz in der Stichprobe und somit eine möglichst hohe Typizität der einzelnen Fälle, wie in Abschnitt 3.3.1 dargelegt ist. Zweitens ist der Vergleich von Experten und Novizen interessant, weil in der Literatur wenig und zudem kontrovers darüber diskutiert wird, inwiefern sich Experten und Novizen beim algebraischen Umformen unterscheiden. Die wenige Forschung, die es in diesem Bereich gibt, schreibt den Experten eine hohe Flexibilität zu. Es ist aber unklar, inwiefern die Experten diese Flexibilität beim alltäglichen Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen auch tatsächlich nutzen (Star & Newton, 2009). Einerseits ist in Cortes (2003) berichtet, wie die interviewten Experten ihre algebraischen Umformungen ganz spezifisch auf die vorgelegten Aufgaben anpassten. Andererseits stellt Lewis

(1981, S. 107) lakonisch fest, nachdem er die algebraischen Umformungen von seinen Experten ausgewertet hatte: "From a natural history standpoint, the experts are disappointing. They don't just look at problems and write down the answers. They occasionally have a flash of insight, but so do other solvers. They make mistakes." Daher ist die dritte Frage besonders interessant, inwiefern die Experten die vorgelegten Bruchterme und Bruchtermgleichungen gleich oder anders behandeln als die Novizen.

Ebenso offen wie inkonsistent ist das Bild, welches die Literatur bei der Frage nach der Homogenität der Expertenlösungswege zeichnet. Wählen Experten jeweils den gleichen Lösungsweg respektive, auf die Thematik hier bezogen, strukturieren sie gleich? Gerade weil in dieser Arbeit die Individualität des Strukturierens im Vordergrund steht, ist es von Interesse, inwiefern selbst Experten unterschiedlich strukturieren. Die Literatur gibt darauf keine Antwort. Allerdings liegen ein paar wenige Studien aus anderen Bereichen vor. So sind beispielsweise in Chi, Feltovich und Glaser (1981) erstaunlich homogene Problemrepräsentationen bei den Experten dokumentiert. Ebenso ist in Star und Newton von einer nahezu „besten“ Strategie berichtet, worin die Urteile der Experten übereinstimmen (denen sie aber beim Umformen nicht immer auf Anhieb folgen). Im Gegensatz dazu schreibt Dowker (1992, S. 53) über ihre Untersuchung der numerischen Abschätzungsstrategien von Mathematikern: "The most striking result of this investigation was the number and variety of specific estimation strategies used by mathematicians." Jede dieser Studien hat jeweils anders gefragt und folglich sind ihre Resultate nur bedingt vergleichbar. Trotzdem belegen sie den Klärungsbedarf, inwiefern zwei Experten gleich respektive unterschiedlich strukturieren. Aus diesem Grund ist die zweite Forschungsfrage äußerst relevant.

Der Hauptteil dieses Kapitels besteht in der Darstellung und Illustration der Resultate dieser ersten Studie, insbesondere des Kategoriensystems. Die Studie ist in Rüede (2012c, 2013) publiziert inklusive der Beschreibung der Methode und der Darstellung der Resultate. Zum Teil bleiben die folgenden Abschnitte nahe an diesen Publikationen. Vorrangig seien nun aber zuerst jene methodischen Details aufgeführt, welche in Kapitel 3 unausgeführt blieben.

4.1 Methode

Befragt wurden Experten und Novizen. Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, waren die Interviews halbstrukturiert und aufgabenbasiert. In Abschnitt 3.3.2 sind die benutzten Bruchterme und Bruchtermgleichungen vorgestellt. Insgesamt nahmen 12 Novizen und 12 Experten an der Untersuchung teil.

Die Novizen (6 weiblich, 6 männlich) waren 15- bis 17-jährig und im 9. oder 10. Schuljahr. Sie hatten im Schnitt schon zwei bis drei Jahre Algebraunterricht besucht und Terme, lineare Gleichungen, Faktorisieren von Polynomen, Vereinfachen von Bruchtermen und Lösen von Bruchtermgleichungen behandelt. Als Schultyp wurden Schweizer Gymnasien ausgewählt. Diese bereiten vorwiegend auf ein universitäres Studium vor und betonen daher die Algebra stark. Drei verschiedene Gymnasien wurden bestimmt. Zwei Novizen belegten den musischen Schwerpunkt, vier den Schwerpunkt in Wirtschaft und Recht und sechs den mathematischen Schwerpunkt. Alle Novizen hatten im Mathematikunterricht Prüfungen zum Thema Bruchterme und Bruchtermgleichungen abgelegt. Gemäß ihren Mathematiklehrpersonen hatten dabei vier der ausgewählten Novizen ungenügende bis knapp genügende Noten erzielt, vier mittlere Noten und die restlichen vier exzellente Noten. Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Die Experten waren 12 Schweizer Mathematiklehrpersonen am Gymnasium (1 weiblich, 11 männlich). Sie besaßen alle ein Universitätsdiplom in Mathematik, ein Lehrdiplom in Mathematik und mindestens fünfjährige Unterrichtserfahrung am Gymnasium. Darüber hinaus verfügten sie über Zusatzqualifikationen als Mathematikdidaktikdozenten an einer Hochschule (4), hatten promoviert (2), waren Lehrbuchautoren (1) oder sie waren in die berufspraktische Ausbildung der Lehramtsstudierenden involviert (5). Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Alle Novizen wurden an ihrer Schule interviewt. Die Experten kamen für die Interviews an die Universität Zürich. Die Interviews wurden aufgezeichnet und anschließend, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, ausgewertet.

4.2 Resultate

Vier Kategorien von Strukturierungen konnten empirisch identifiziert werden: Den Ausdruck *optisch einfacher machen*, ihn *ändern*, ihn *umstrukturieren* oder seine *Klassifizierungen erforschen*. Im Folgenden wird für jede Kategorie ein Ankerbeispiel gegeben. Anschließend werden die Kategorien detailliert umschrieben. Um die Ankerbeispiele möglichst gut miteinander vergleichen zu können, beziehen sie sich alle auf die Bruchtermgleichung

$$\frac{20x^3 + 30x^2}{4x + 6} = \frac{12x + 18}{8x + 12}.$$

Wenn Betrachtungen des Definitionsbereichs mal außer Acht gelassen werden, lassen sich bei dieser Gleichung die Nenner schnell wegmultiplizieren, da sie sich nur um den Faktor 2 unterscheiden. Das Wegmultiplizieren der Nenner führt auf die kubische Gleichung $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$. Dieser Weg ist am Standardverfahren des Gleichnamigmachens und Wegmultiplizierens der Nenner orientiert. Nichtsdestotrotz lässt sich $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$ durch

Faktorisieren der linken wie der rechten Seite lösen. Einfacher ist aber, direkt am Anfang sowohl den linken als auch den rechten Bruch intern zu kürzen, was sofort auf $5x^2 = \frac{3}{2}$ führt.

4.2.1 Kategorie 1: Optisch einfacher machen

Novize11 (weiblich) zog zu Beginn keine Verfahren in Betracht. Sie stellte mehrere Strukturierungen her, eine davon ist durch die folgenden geordneten und redigierten Interviewpassagen illustriert.

Anwendbarkeitsbedingung: „Das oben *(zeigt auf die Zähler links)*. Es sind hohe Zahlen, es sind Exponenten. [...] Zuerst wollte ich etwas addieren [...] 20 und 30 [...] aber das geht ja nicht.“ Dann bin ich nach rechts.

Strukturierung: „$12x$ und 12, das ist einfacher [...] darf ich das jetzt teilen?“

Konsequenz: „$8x$ und 18, das kann man nicht teilen oder so.“

Abschlussbedingung: „Es hat mich genervt [...] ich weiss[1] nicht, was ich wie rechnen muss [...] Ich habe einfach das, es macht mir immer Probleme, das wegzukürzen, und daher wollte ich es umgehen.“

Novize11 schlug dann vor, übers Kreuz zu multiplizieren. Sie erklärte, dass man damit „einfach unter dem Strich so viel wie möglich wegbringen“ kann.

Kategorie

Novize11 behandelte den Zähler $20x^3 + 30x^2$ zuerst als Prozess (Abschnitt 2.5.1). Sie wollte addieren. Darüber wohl unsicher, bezog sie Gleiches aufeinander, um den Ausdruck einfacher aussehen zu lassen, denn Sie behandelte $\frac{12x+18}{8x+12}$ ähnlich wie eine Analphabetin einen Schriftzug. Eine Analphabetin findet grafische Gemeinsamkeiten in Schriftzügen wichtig. Analog fokussierte Novize11 in $\frac{12x+18}{8x+12}$ auf syntaktisch Gleiches. Gleiche – oder zumindest ähnliche – Teile bildeten die Relata des Bezugs. So bezog sie $12x$ auf 12. Der Bruchstrich bewirkte, dass Novize11 die beiden 12 im Sinne einer Division aufeinander bezog. Das hätte ein schönes Ergebnis zur Folge gehabt und hätte dann einfacher ausgesehen. In diesem Sinne hoffte Novize11 auf eine optische Vereinfachung, indem sie versucht einen Prozess (nämlich die Division) möglichst einfach auszuführen.

Dann machte sich Novize11 die Konsequenz ihrer Strukturierung klar. Weil sie $12x$ und 12 aufeinander bezogen hatte, blieben in $\frac{12x+18}{8x+12}$ noch die beiden

[1] Alle Interviewpassagen der vorgelegten Arbeit orientieren sich an der schweizerischen s-Schreibung

Terme 18 und $8x$ übrig. Daher bezog sie diese aufeinander. Wieder orientierte sich Novize11 am Bruchstrich – dem damit verbundenen Prozess des Dividierens – und untersuchte, inwiefern 18 durch 8 teilbar ist. Sie erkannte, dass die beiden Zahlen nicht einfach miteinander dividiert werden können.

Daher konnte Novize11 den Bruch $\frac{12x+18}{8x+12}$ durch dieses „diagonale Dividieren" (in der Abschlussbedingung spricht Novize11 von „Wegkürzen") nicht so bearbeiten, dass er dann optisch einfacher ausgesehen hätte. Also verwarf sie diese Strukturierung. Die in der Abschlussbedingung zitierte Passage dokumentiert das Ringen von Novize11 um korrekte Regeln, nach denen algebraische Zeichen kombiniert werden dürfen. Im zweiten Teil zeigt die Aussage „es macht mir immer Probleme, das wegzukürzen, und daher wollte ich es umgehen" dass sie um dieses Ringen weiß. Offenbar traut sie ihren „Privatschemata" (Malle, 1993, S. 176) nicht.

Aufgrund dieser Unsicherheit entschied sich Novize11 zur Kreuzmultiplikation. Für Novize11 scheint die Größe ihrer Unsicherheit ein Kriterium für das Akzeptieren oder Verwerfen von Strukturierungen zu sein. Bei obig beschriebenen Strukturierungen war sich Novize11 unsicher über deren Korrektheit. Folglich verwarf sie diese Strukturierungen. Umgekehrt gab ihr die Erinnerung an den Mathematikunterricht Sicherheit beim Vorschlag, über das Kreuz zu multiplizieren. Denn im Interview rechtfertigte sie dieses Verfahren mit der Bemerkung: „Wir haben mal ein Thema gehabt [...]".

Wichtig zu erwähnen ist, dass in diesem Fall das Vornehmen der optisch evozierten Strukturierung ihren Sinn hatte. Denn erst nachdem Novize11 all diese Strukturierungen verworfen hatte, war sie bereit, ein Verfahren in Betracht zu ziehen.

4.2.2 Kategorie 2: Ändern

Novize3 (weiblich) änderte als Erstes die Gleichung, wie die folgenden geordneten und redigierten Interviewpassagen belegen.

Anwendbarkeitsbedingung: „Die Zahlen [sind] ziemlich unterschiedlich [...] und doch irgendwie alle gerade."

Strukturierung: Also zuerst fiel mir die $4x+6$ auf. „Das ist eigentlich dasselbe wie das *(zeigt auf* $12x + 18$*)*, mit einer 3 ausgeklammert."

Konsequenz: „Hier *(zeigt auf* $20x^3 + 30x^2$*)* würde ich ganz bestimmt die x^2 noch ausklammern und danach, zuerst mal hier auch *(zeigt auf* $8x + 12$*)* die 4, ausklammern, ja, $2x + 3$, und hier *(zeigt auf die* $20x^3 + 30x^2$*)* die 10 ausklammern, gibt auch $2x + 3$."

Abschlussbedingung: „Dann habe ich über das Kreuz denselben Inhalt in den Klammern."

Auf die Nachfrage im Interview, ob sie sich schon Gedanken über den nächsten Schritt gemacht habe, überlegte Novize3 nahezu eine halbe Minute. Dann schlug sie vor, „gleichnennrig“ zu machen und leitete so eine Strukturierung ein, die sich am Standardverfahren orientierte.

Kategorie

Das Ziel von Novize3 war die Änderung und nicht (in erster Linie) die Lösung der Gleichung. Das in der Anwendbarkeitsbedingung festgehaltene Merkmal der geraden Zahlen schien Anlass für das Ausklammern von Nenner und Zähler zu sein. Dabei meinte Novize3 mit Ausklammern wohl das Suchen von gleichen Klammern, wie sie in der Abschlussbedingung vermerkte. Dieses Suchen leitete dann das Strukturieren. So suchte Novize3 nach Vielfachen und gleichen Teilern.

Vermutlich führten die Spezifika der gegebenen Zahlen dazu, dass Novize3 zuerst den linken Nenner auf den rechten Zähler bezog. Die Strukturierung bestand in der Behandlung von $12x + 18$ als das Dreifache von $4x + 6$. Danach suchte sie nach gemeinsamen Klammerfaktoren in der Diagonalen von links oben nach rechts unten. Sukzessive bezog sie in $20x^3 + 30x^2$ die beiden x-Potenzen aufeinander, in $8x + 12$ die beiden Koeffizienten und ebenso die beiden Koeffizienten in $20x^3 + 30x^2$. Durch diese Bezüge identifizierte sie gemeinsame Teiler, was schließlich im gemeinsamen Faktor $2x+3$ resultierte.

Als Novize3 „über das Kreuz denselben Inhalt in den Klammern“ erkannte, war die Aufgabe bearbeitet. Sie hatte das von ihr erkannte Verfahren des Suchens von gleichen Klammern abgeschlossen, die Gleichung war geändert. Der Zweck der Strukturierungen dieser Kategorie ist also genau der, dass sie dem Ausführen von Verfahren dienen. Sfard (2008, S. 237) spricht in diesem Zusammenhang von „Handlungen, die Objekte ändern“.

4.2.3 Kategorie 3: Umstrukturieren

Novize2 strukturierte gemäß dem Verfahren des Wegmultiplizierens der Nenner. Als Konsequenz lag dann mental der Zwischenschritt $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$ vor. Die folgenden redigierten und geordneten Interviewpassagen zeigen, wie Novize2 dann so zu strukturieren begann, dass sie für sich ein neues Verfahren zum Lösen von $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$ generierte.

Anwendbarkeitsbedingung: „Ich habe nicht so gerne, wenn die x in so hohen Potenzen sind und dann versuche ich wegzunehmen.“ Doch man kann „hier nichts subtrahieren [...], das gleich ist, das man wegstreichen kann“. Ich wollte dann einfach mal „die Zahl irgendwie [...] vereinfachen, weil die $40x^3$ und die $60x^2$ waren mir einfach zu komische Zahlen“.

Bezug: In $40x^3$ und $60x^2$ ist in beiden das x und beides sind „Zehnerzahlen“.

Konsequenz: Dann „ist [mir] aufgefallen, dass es hier gleiche Teiler hat“.

Abschlussbedingung: „Dann habe ich ausgeklammert [...] dann werden es $20x^2(2x+3)$ und auf der anderen Seite habe ich dann geschaut, ob man auch ausklammern kann, dann ist es da 6 und es gibt $6(2x + 3)$ [...] Dann kann man durch diese $2x + 3$ rechnen, weil sie auf beiden Seiten vorhanden sind.“

Kategorie

Charakterisierend für diese Strukturierung ist die Verbindung zweier Strukturierungen. In gewissem Sinne arbeitete sich Novize2 von einer additiven zu einer distributiven Strukturierung der mental vorliegenden Zwischengleichung $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$. Damit ist Folgendes gemeint: Novize2 behandelte $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$ zuerst wie eine lineare Gleichung. $40x^3$, $60x^2$, $12x$ und 18 sind Summanden. Wie in der Anwendbarkeitsbedingung beschrieben, nahm Novize2 jeweils einen Summanden durch Subtraktion auf die andere Seite der Gleichung. Das Ziel dabei war – wie bei linearen Gleichungen intendiert –, Summanden mit gleichen Potenzen in x zusammenzubringen. Doch weil die Summanden allesamt unterschiedliche Potenzen in x hatten, war dieses Verfahren unnütz. Die additive Strukturierung erwies sich nicht als hilfreich.

Diese Einsicht bewog Novize2 zu einer Umstrukturierung. Sie bezog nämlich die Vorfaktoren sowie Potenzen aufeinander. Das war ihre zweite Strukturierung. Nicht mehr das Hin- und Herschieben war wichtig, sondern die Zerlegung der einzelnen Summanden in Faktoren. In $40x^3$ und $60x^2$ bezog sie die beiden Koeffizienten und die beiden x-Potenzen aufeinander. Das ist mit Blick auf die gezogenen Konsequenzen eine distributive Strukturierung. Denn so entdeckte sie die gleichen Teiler: 40 und 60 sind beide durch 10 teilbar, sogar durch 20, und x^3 und x^2 durch x^2. In der Folge klammerte sie aus. Links stand $20x^2(2x + 3)$. Nachdem sie auch rechts faktorisierte, stand schließlich links und rechts ein Produkt und nicht eine Summe.

Insgesamt behandelte Novize2 die Teile $40x^3$, $60x^2$, $12x$ und 8 je auf zwei unterschiedliche Arten. Das erste Mal schob sie sie hin und her, sie versuchte sie „wegzunehmen“. Das zweite Mal zerlegte sie sie in Faktoren, $40x^3$ und $60x^2$ waren beispielsweise „Zehnerzahlen“. Indem sie sagte, dass es „*hier* gleiche Teiler“ habe, drückt sie aus, dass sie das Produkt der beiden Teiler als den Summanden des ersten Mals erkennt. Sie begriff also, dass sie das zweite Mal dasselbe wie das erste Mal umformte.

Die Abschlussbedingung lässt sich bei Novize2 nur indirekt erschließen. Indem sie die Division durch den gemeinsamen Faktor $2x + 3$ erkennt, realisiert sie den Gewinn der distributiven Strukturierung für das Lösen der Gleichung.

Während Novize2 umstrukturierte, generierte sie ein Verfahren, das sie nicht vorausgesehen hatte. Das wird dadurch belegt, dass Novize2 zuerst die Vorfaktoren aufeinander bezog. Sie sah den gemeinsamen Faktor $2x + 3$ nicht voraus, sondern erhoffte sich irgendetwas, „um die Zahl irgendwie zu vereinfachen". Durch das Ausklammern wanderte der Fokus von den Vorfaktoren zu den Klammerfaktoren, die sich dann als gleich erwiesen.

Prozesse des Umstrukturierens scheinen allgemein der Schlüssel zur Expertise im Strukturieren zu sein. Denn sie spielen auch in anderen Kontexten eine zentrale Rolle, beispielsweise beim Strukturieren von Punktfeldern (Söbbeke 2005). Die Autorin dokumentiert, wie es Kindern durch Umdeuten gelingt, Teile von Punktfeldern als Teile des Ganzen zu sehen.

4.2.4 Kategorie 4: Klassifizierungen erforschen

Experte5 strukturierte zuerst verfahrenbasiert, er bezog die Nenner aufeinander. Bald erkannte er aber die sich abzeichnende kubische Gleichung. Er verwarf daher die erste Strukturierung und nahm eine zweite vor, wie die folgenden redigierten und geordneten Interviewpassagen illustrieren.

Anwendbarkeitsbedingung: „Ich hatte die Brüche wegschaffen wollen und das heisst gleiche Nenner erzeugen wollen. Zum Beispiel wenn ich den Bruch rechts mit 2 kürze, sehe ich schon im Voraus, dass die Zähler im Groben etwas Kubisches ergeben. [...] Die Gleichung dritten Grades hat mich irgendwie gebremst, denn ich hätte mit Faktorzerlegung oder Lösen oder so weitermachen müssen. Dann erst kam mir eigentlich der Gedanke, ich könnte ja zuerst die Brüche vereinfachen."

Bezug: Ich habe dann gesehen, „20, 30 zum Beispiel beim ersten Bruch, stehen zueinander im gleichen Verhältnis wie 4 und 6. Oder, eben x^3 zu x^2 wie x zu 1, oder 12 zu 18 wie 8 zu 12."

Konsequenz: „Im Hinterkopf habe ich, so denke ich, das Ausklammern schon gesehen."

Anwendbarkeitsbedingung: „Also das ist der Weg, den ich jetzt einschlagen würde."

Kategorie

In der Anwendbarkeitsbedingung formulierte Experte5 seine erste Lesart der Gleichung als eine, die durch Wegmultiplikation der Nenner gelöst werden kann. Experte5 schätzte dieses Vorgehen als langwierig ein und suchte daher nach einer Alternative. Er zog folgende Konsequenz aus seiner ersten Strukturierung: Wenn der Bezug der beiden Nenner aufeinander nichts bringt, dann muss der Bruch links wie auch der Bruch rechts einzeln vereinfachbar sein. Das war seine Vermutung. Im Folgenden strukturierte er so, dass er diese Vermutung verifizieren oder verwerfen kann. In diesem Sinne strukturierte er, um den Ausdruck zu erforschen.

Aus diesem Grund bezog er dann die Vorfaktoren sowie die x-Potenzen in $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6}$ respektive $\frac{12x+18}{8x+12}$ aufeinander. Seine Strukturierung besteht aus Verhältnissen, die er anschließend miteinander vergleicht und deren Gleichheit er erkennt. In der Abschlussbedingung formulierte Experte5 diese Erkenntnis explizit. Offenbar war er sich sehr sicher, dass die Brüche intern gekürzt werden können. Er nutzte die Strukturierung zur Plausibilisierung seiner Vermutung.

Seine Anwendbarkeits- und Abschlussbedingung enthalten indirekt ein Abschlusskriterium: Gewählt wird jene Strukturierung, die auf einen bequemen (einfachen) Lösungsweg führt. Das wird dadurch belegt, dass er das Wegmultiplizieren der Nenner als mühsam eingeschätzt und daher verworfen hatte, jedoch nicht das interne Kürzen der Brüche.

Solche Strukturierungen dienen der Entscheidung darüber, welches Verfahren eine Person aus der Menge der ihr bekannten Verfahren ausführen soll. In diesem Sinne ist das Ziel dieser Strukturierung die Erforschung möglicher Klassifikationen der Gleichung: Welches ist der einfachste Lösungweg? Das bedingt, dass nur jene Personen solche Strukturierungen vornehmen können, die über eine Vielfalt von Verfahren(sideen) verfügen und nur noch entscheiden müssen, welches davon sie verfolgen.

4.2.5 Umschreibung der Kategorien

Anhand der Gleichung $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$ ist im obigen Abschnitt 4.2 je ein Ankerbeispiel von jeder Kategorie vorgestellt. In Rüede (2012c) sind weitere vier Ankerbeispiele gegeben, und zwar anhand der Gleichung $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$. Insgesamt illustrieren diese Beispiele die vier Kategorien von Prozessen des Strukturierens, die in Tabelle 4.1 zusammenfassend dargestellt sind. Im Folgenden werden diese Kategorien im Detail ausgeführt. Dabei wird auf die Konsequenz jeweils nicht speziell eingegangen, da diese typischerweise in sich ergebenden Umformungen oder Strukturierungen besteht, die sich über die vier Kategorien hinweg nicht unterscheiden und folglich kein geeignetes Trennungskriterium darstellen.

Tabelle 4.1: Vier Kategorien von Prozessen des Strukturierens

	Kategorie 1 Den Ausdruck optisch einfacher machen	**Kategorie 2** Den Ausdruck ändern	**Kategorie 3** Den Ausdruck umstrukturieren	**Kategorie 4** Klassifizierungen des Ausdrucks erforschen
Anwendbarkeits-bedingung	Ähnliche Teile	Spezifisches Merkmal als Hinweis auf ein Verfahren	Verwerfen einer Strukturierung	Vermutung eines möglichen Verfahrens
Strukturierung	Relata: Ähnlich aussehende Teile. Bezug: Orientiert sich an gegebenen Operationszeichen, ermöglicht eine optische Vereinfachung	Relata: Durch Verfahren vorgegeben. Bezug: Dient allein der Ausführung des ersten Verfahrensschritts	Relata: Werden zu Teiltermen des Ausdrucks. Bezug: Macht eine mathematische Gesetzmäßigkeit sichtbar	Relata: Teilterme des Ausdrucks. Bezug: Ermöglicht die Validierung der Vermutung
Abschluss-bedingung	Gefühl der Sicherheit, dass Strukturierung zu korrekter Umformung führt	Das Verfahren konnte durchgeführt werden	Die Strukturierung führt zu gewinnbringenden Umformungen	Der vermutete Lösungsweg erweist sich als einfach

Kategorie 1: Den Ausdruck optisch einfacher machen

Strukturierungen dieser Kategorie sind wesentlich durch die grafische Erscheinung des Ausdrucks bestimmt. Sie orientieren sich nicht an Verfahren oder mathematischen Gesetzen, sondern an optisch ähnlichen oder gleichen Zeichenkombinationen.

Anwendbarkeitsbedingung: Die Person sucht nach optisch Gleichartigem mit dem Ziel, dass der Ausdruck schließlich irgendwie einfacher aussehen wird.

Strukturierung: Die Relata sind optisch zusammengehörige Bündel von Zeichen, die typischerweise grafisch ähnlich aussehen. Der Bezug orientiert sich an den Operationszeichen, die in der zweidimensionalen Anordnung des Ausdrucks zwischen diesen Bündeln stehen.

Abschlussbedingung: Je sicherer sich die Person über die Korrektheit der sich ergebenden Umformungen ist, umso eher hält sie an der Strukturierung fest.

Die Mehrheit der Strukturierungen dieser Kategorie liefert falsche Umformungen. In der Literatur wird dann beispielsweise von Übergeneralisierung (Matz, 1982) gesprochen, von Streich- respektive Weglassschemata (Malle, 1993), von visueller Augenscheinlichkeit (Kirshner & Awtry, 2004), vom Verlangen, die Ausdrücke „fertig zu machen“ (to ‚finish‘ them; Tirosh, Even & Robinson, 1998, S. 52) oder von der (erzwungenen) Behandlung des Ausdrucks als Prozess (Abschnitt 2.5.1).

Kategorie 2: Den Ausdruck ändern

Strukturierungen dieser Kategorie basieren darauf, dass der Ausdruck als Befehl verstanden wird. Ein Term wird beispielsweise nur als Verfahren behandelt.

Anwendbarkeitsbedingung: Das Ziel ist die Änderung des Ausdrucks. So fällt der Person ein spezifisches Merkmal auf, das mit einem bestimmten Verfahren verbunden ist. Dabei kann es sich um ein angemessenes oder unangemessenes Verfahren oder auch bloß um einen Verfahrensschritt handeln.

Strukturierung: Das Verfahren gibt vor, welche Relata zu wählen sind. Diese Relata bezieht die Person so aufeinander, dass das Verfahren ausführbar wird. Dabei begreift die Person die Relata als Bestandteile des Verfahrens und nicht als Teilterme des Ausdrucks. Andere Teile des Ausdrucks beachtet die Person in der Regel gar nicht.

Abschlussbedingung: Sobald die Person das Verfahren ausgeführt hat, ist die Aufgabe bearbeitet. Die Strukturierung ist stillschweigend akzeptiert, da der Ausdruck nun geändert ist

Strukturierungen dieser Kategorie basieren auf der Behandlung von Termen als Verfahren (vgl. Abschnitt 2.5.2). Das Verfahren gibt vor, wie strukturiert werden soll. Dabei steht am Anfang ein spezifisches Merkmal. Beispielsweise ruft ein Bruchstrich einen Bezug zwischen den Nennern hervor oder Klammern motivieren multiplikative Bezüge mit dem Ziel des Ausmultiplizierens.

Solche Strukturierungen führen in dieser Kategorie nur zu einer „Änderung“, da die Umformungsschritte nicht auf ihren Gewinn für die Lösung der Aufgabe untersucht werden. Wichtig ist die Ausführung der Umformung und nicht die Lösung der Aufgabe.

Es ist wertvoll, sich klar zu machen, welche Bezüge in einem Ausdruck bei Strukturierungen der Kategorie 2 keine Rolle spielen. Nehmen wir etwa das Beispiel der Vereinfachung von $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ und stellen uns eine Person vor, die die Bruchstriche erkennt und sofort gleichnamig machen möchte. Eine solche Person bezieht nur die beiden Nenner aufeinander. Der Bezug besteht einzig im Vergleich dieser beiden Nenner. Die Person behandelt $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ bloß als Ausdruck mit Nennern. Sie wird beispielsweise nicht registrieren, dass es sich um eine Differenz handelt, auch werden die Zähler keine Rolle spielen. In aller Regel schaut sie diese auch gar nicht an. Einzig der Vergleich der beiden Nenner interessiert. Würde man diese Person im Nachhinein bitten, den Ausdruck aus dem Kopf aufzuschreiben, könnte sie vermutlich nur etwas über die beiden Nenner sagen und was sie mit ihnen machen würde, mehr nicht.

Kategorie 3: Den Ausdruck umstrukturieren

Strukturierungen dieser Kategorie sind Umstrukturierungen. Derselbe Ausdruck wird anders behandelt. Grundlage dafür ist das Ziel, welches im Lösen der Aufgabe besteht – und nicht nur im Ausführen von Umformungen. Denn mit diesen Strukturierungen gehen Evaluationsprozesse einher, welche die vorgenommenen Strukturierungen am Gewinn für den Lösungsprozess messen.

Anwendbarkeitsbedingung: Die Person hat eine erste Strukturierung verworfen, weil sie dem Ziel, die Aufgabe zu lösen, nicht förderlich war.

Strukturierung: Die Relata werden als Teilterme des Ausdrucks – und nicht als Bestandteile eines Verfahrens – erkannt. Der Bezug macht eine mathematische Gesetzmäßigkeit sichtbar, welche die Person auf diese Weise entdeckt.

Abschlussbedingung: Sobald die Person auf Konsequenzen aus der Strukturierung geschlossen hat, die zur Lösung der Aufgabe führen, akzeptiert sie die Strukturierung.

Das Ziel dieser Strukturierungen ist ein anderes als jenes der Strukturierungen von Kategorie 2. Die Strukturierungen der Kategorie 3 gehen über die Korrektheit der Konsequenzen hinaus. Der zusätzliche Punkt ist die Strategie. Es geht nicht nur darum, korrekte Umformungen auszuführen, sondern auch darum, die Aufgabe zu lösen. Das heißt, die Umformungen müssen korrekt *und* strategisch wertvoll sein.

Kategorie 4: Klassifizierungen des Ausdrucks erforschen

Strukturierungen dieser Kategorie 4 dienen in erster Linie der Entscheidung darüber, welche der möglichen Verfahrensideen verfolgt werden soll.

Anwendbarkeitsbedingung: Die Person vermutet einen Gewinn beim Verfolgen einer bestimmten Verfahrensidee. Diese Idee hat sie aufgrund einer spezifischen Eigenschaft des Ausdrucks im Auge oder aufgrund von Schlussfolgerungen aus einer verworfenen Strukturierung. Das Ziel ist nun das Verifizieren oder allfällige Verwerfen dieser Vermutung.

Strukturierung: Als Relata kommen alle Teilterme des Ausdrucks in Frage. Der Bezug erlaubt es, die Angemessenheit des vermuteten Verfahrens abzuschätzen.

Abschlussbedingung: Die Person hält an der Strukturierung fest, sobald ihres Erachtens die Vermutung belegt wird, das entsprechende Verfahren einfach ausführbar ist und zur Lösung der Aufgabe führt.

Strukturierungen dieser Kategorie sind typisch für Experten. Sie sind erst dann wichtig, wenn eine Person über mehrere Möglichkeiten zur Lösung der Aufgabe verfügt. In diesem Fall muss die Person entscheiden, welche Möglichkeit die beste ist. Genau dazu werden Strukturierungen der Kategorie 4 vorgenommen. Sie schlagen sich im zentralen Merkmal von algebraischer Expertise nieder, nämlich im flexiblen Verhalten (Star & Newton, 2009; Tall & Thomas, 1991; Thomas, 2008).

4.2.6 Strukturierungen, die sich an Verfahren orientieren

Sowohl Novizen als auch Experten nutzten oft Verfahren. Daher spiegelte sich in vielen Strukturierungen die Anwendung von Verfahren. Allerdings sind Unterschiede bei diesen Strukturierungen festzustellen. Diese Unterschiede werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

Es ist informativ, sich zuerst die Vielfalt der verwendeten Verfahren klar zu machen. Bei den Bruchtermgleichungen konnten folgende Verfahren identifiziert werden: Wegmultiplikation der Nenner, Kreuzmultiplikation bei Gleichungen wie $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, Vereinfachung (z. B. intern kürzen, zusammenfassen) der Gleichung von links nach rechts, Wegsubtraktion von $\frac{bB}{C}$ bei Gleichungen wie $A + b \cdot \frac{B}{C} = \frac{bB}{C}$ (zwei Novizen kannten dieses Verfahren aus einer Unterrichtseinheit, die von mir zusammen mit ihrer Lehrperson konzipiert wurde und wo u. a. fünf solche Gleichungen vorgestellt wurden, um den Anwendungsbereichs des Wegmultiplizierens der Nenner zu diskutieren). Die identifizierten Verfahren bei den Bruchtermen waren: Kürzen des Bruchs, Herstellung der

Form $A - A$ (denn $A - A$ ist gleich 0), Addition respektive Subtraktion von Brüchen durch Suchen des Hauptnenners.

Wie erwartet waren die verbalen Daten vor allem dann reichhaltig, wenn die entsprechenden Strukturierungen nicht einfach der Ausführung von Verfahren dienten. Solche Strukturierungen konnten allesamt einer der vier Kategorien zugeordnet werden. Wenn hingegen die Strukturierung stark durch ein Verfahren bestimmt war, konnte sie nicht immer kategorisiert werden. Schwierigkeiten bereitete dabei vor allem die Trennung der Kategorien 3 und 4. Denn die verbalen Daten enthielten manchmal zu wenig Information, um die Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung genügend gut umschreiben zu können. In jenen Fällen aber, wo die Kategorisierung einer sich am Verfahren orientierenden Strukturierung gelang, offenbarten sich die folgenden Unterschiede bei der Anwendung der Verfahren:

Kategorie 1: Dieser Kategorie sind keine Strukturierungen zugeordnet, welche der Ausübung eines Verfahrens dienten.

Kategorie 2: Strukturierungen dieser Kategorie, die sich an einem Verfahren orientierten, zeichneten sich durch das Fehlen von evaluierenden Gedanken aus. Diese waren hingegen ein notwendiges Kriterium für die Zuordnung einer Strukturierung in die Kategorie 3 respektive 4. Das wird offensichtlich bei Novize10, der die Gleichung1 $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$ wie folgt behandelte. Auf die Frage, worauf er zuerst schaute, antwortete er: „Also ich habe geschaut, was muss ich bei diesen Nennern machen, damit sie gleich sind.“ Das machte Novize10 bei allen anderen Gleichungen auch. Bei Gleichung1 hatte er „12 und 6 gesehen und 4 und 8 und [...] 4 ist die Hälfte von 8 und 6 die Hälfte von 12“. Das war seine Strukturierung im Detail. Daher erweiterte er die linke Seite um 2. Sein Schlussresultat war $18 + 12x + 30x^2 + 20x^3$. Damit war für ihn die Aufgabe bearbeitet. Er sagte später, dass er das Gleichheitszeichen „irgendwie als Plus gesehen“ habe. Das bestätigt einmal mehr, dass beim Strukturieren der Kategorie 2 einzig jene Teile angeschaut werden, die wichtig für die Ausführung sind. Für Novize10 waren die Nenner wichtig. Unwichtig war, ob es sich um eine Gleichung oder einen Term handelt.

Kategorie 3: Diese Strukturierungen enthielten immer eine beurteilende Komponente. Das erlaubte es, sie von den Strukturierungen der Kategorie 2 zu trennen. Allerdings wendeten die Personen die Verfahren relativ stur an und zeigten wenig erforschende Manipulationen, was die Abgrenzung zur Kategorie 4 ermöglichte. Zum Beispiel behandelte Novize2 den Ausdruck $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$ als eine Gleichung, in der die Nenner wegzumultiplizieren sind. Daher bezog sie die beiden Nenner aufeinander: „Das habe ich gesehen, dass das *(zeigt auf den Nenner links)* halb so viel ist wie das *(zeigt auf den Nenner rechts)*.“ Sie führte dann das Verfahren so aus, wie es im Lehrbuch beschrieben ist: Sie multiplizierte die Gleichung mit $8x + 12$. Wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, knackt sie sogar die sich ergebende kubische Gleichung. Die beurteilende Komponente ist hier nur indirekt vorhanden, indem sie am Schluss festhält, dass die Gleichung gelöst ist.

Kategorie 4: Auch in jenen Fällen, wo die Experten Verfahren anwendeten, gingen sie forschend vor. Sobald sie ein Verfahren vermuteten, produzierten sie eine Strukturierung, um die Angemessenheit des Verfahrens beurteilen zu können. Dabei verstanden sie das Verfahren nicht als einen fixen Plan, sondern passten diesen (allfälligen) Plan immer der Situation an. Das zeichnete sie aus. Beispielsweise bezog Experte5 in der Gleichung $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6} = \frac{12x+18}{8x+12}$ die beiden Nenner aufeinander, um die Angemessenheit des Wegmultiplizierens der Nenner abzuschätzen: „Allererste Reaktion war, dass mir sehr gut gefallen hat $4x+6$ und $8x+12$, weil die im Verhältnis 1 zu 2 stehen.“ Das war seine Strukturierung. Daraus schloss er: „Somit habe ich vielleicht überlegt, dass ich die Brüche so vereinfache, dass ich die gleichen Nenner habe, also hier *(zeigt auf den Bruch rechts)* $4x + 6$.“ Experte5 passte das Verfahren an, er suchte nicht wie im Lehrbuch – oder wie obiger Novize2 – den kleinsten gemeinsamen Nenner. Vielmehr stellte er auf einfachste Art und Weise den gleichen Nenner her, nämlich, indem er $\frac{12x+18}{8x+12}$ kürzte. Zudem zog er aus der Strukturierung den Schluss, dass das Wegmultiplizieren der Nenner vorerst weiter verfolgt werden könne. Darauf erkannte er allerdings die resultierende kubische Gleichung und verwarf als Folge diese Strukturierung. Sie erschien ihm als zu mühsam.

Die sich schon hier abzeichnenden Unterschiede zwischen den Strukturierungen der Experten und jenen der Novizen werden dann im Abschnitt 4.2.8 präzisiert.

4.2.7 Die Vielfalt der Experten-Strukturierungen

Jeder Experte strukturierte anders (Rüede, 2013). Diese Vielfalt wird anhand des Strukturierens von $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$ illustriert. Denn bei diesem Bruchterm erwartet man noch am ehesten, dass die Experten gleich strukturieren. Tatsächlich kürzten alle Experten, doch jeder anders. Entsprechend unterscheiden sich die produzierten Strukturierungen. In Folgenden sind nur jene Strukturierungen angegeben, welche die Experten während der Bedenkzeit vornahmen. Dabei wird immer nur auf die zentrale Strukturierung fokussiert, damit die Experten gut miteinander verglichen werden können.

Es gab zum Beispiel Experten, die vorwiegend vertikale Bezüge herstellten:

Experte5	
Anwend.	Ich schaue „naturgegeben beim Bruchterm, was ich kürzen kann“.
Strukt.	„Es ist irgendwie dieses Zahlenverhältnis, 6, 9, 4, 6, wo ich sehe, dass diese Koeffizienten im Zähler 1.5-mal so gross sind wie im Nenner.“
Kons.	„Und dann habe ich geprüft, ob der [...] Zähler um den Faktor x^2 grösser ist als der Nenner.“
Abschl.	„Prima vista, erster Verdacht ist da, dass es $\frac{3}{2}$ ergeben könnte. Jetzt prüfe ich nach [...]“

Experte8	
Anwend.	Ich schaue, „ob ich einen gemeinsamen Faktor [...] wegkürzen kann“.
Strukt.	Ich habe „gemerkt, dass das $\frac{2}{3}$ von dem ist und das $\frac{2}{3}$ von dem“ *(zeigt mit den Fingern auf 4 unten, 6 oben und auf 6 unten, 9 oben).*
Kons.	„Dann müsste das ja eigentlich gekürzt werden können, einmal von den Zahlen her.“
Abschl.	„Und wenn die Potenzen auch noch stimmen, dann müsste es gehen.“

Experte11	
Anwend.	„Ich habe immer beides angeschaut, [...] man vermutet sowas in so einem Term drin.“
Strukt.	„Ich habe das x^2 ausgeklammert „und sehe dann, da habe ich 6 und 9 und 4 und 6. Ich suche Ähnlichkeiten in dem $6x + 9$ und dem $4x + 6$.“
Kons.	Ich sah „eher das, was in der Klammer steht“.
Abschl.	„Ich muss das irgendwie noch zwei-, dreimal checken, ob es diesen Faktor gibt.“

Obige Strukturierungen betonen vertikale Blickrichtungen. Darin gleichen sie sich. Sie unterscheiden sich aber in den Details. Zum Beispiel bezogen Experte5 und Experte8 die Koeffizienten und Exponenten vertikal aufeinander. Experte11 bezog hingegen nahezu den ganzen Zähler auf den ganzen Nenner.

Andere Experten bezogen die Teile vor allem horizontal aufeinander:

Experte4	
Anwend.	„Als Erstes wollte ich eine natürliche Zahl kürzen und habe dann gesehen, das geht nicht. Dann war der zweite Anlauf das nächste, [...] was sind denn sonst für Faktoren dabei.“
Strukt.	„Also sicher mal die 2 ausklammern unten, dann hat man $2x + 3$, und oben die 3 oder $3x^2$“
Kons.	... „dann hat man $2x + 3$.“
Abschl.	„Und ich muss nun sagen, was bleibt.“

Experte6	

Anwend.	„Ich dachte, wenn man das überhaupt vereinfachen kann, dann nur durch eine Faktorzerlegung."
Strukt.	Im Nenner „sah ich, dass [...] man nur den Faktor 2 abspalten kann". Den Zähler „würde ich vollständig in Faktoren zerlegen [...] ich vermute mal, ich sah zuerst die 3", dann die x^2.
Kons.	„Das führt dann auf diesen Faktor."
Abschl.	„Aufgrund der Aufgabenstellung [...] nehme ich an, dass sich ein [...] linearer Faktor abspalten lässt."
Experte7	
Anwend.	„Wahrscheinlich ist die Aufgabe so gestellt, dass etwas kürzbar ist, dass viel kürzbar ist."
Strukt.	„Also zuerst habe ich die vielen x gesehen im Zähler und dann gedacht, dass man die x^2 mal ausklammern kann [...] bei den Zahlen [...] sieht man, dass man oben 3 und unten 2 ausklammern kann."
Kons.	„Jetzt müsste man es noch ausrechnen."
Abschl.	„Ich dachte mir, es könnte dasselbe stehen wahrscheinlich, dass die Aufgabe so gestellt ist."
Experte9	
Anwend.	„So wie es gestellt ist, oben eine Summe, unten eine Summe, ist das Schema F."
Strukt.	„Ich schaue, was bringe ich hier raus *(zeigt auf Nenner)* und hier ist es, dass ich die 2 rausbringe, das ist doppelt, dann schaue ich, was bringe ich hier raus *(zeigt auf Zähler)*, sehe x^2, $3x^2$, die 3 und das x^2 ist doppelt."
Kons.	„Dann sehe ich, dass das $2x + 3$ drin ist."
Abschl.	Habe mich zuerst „dem Nenner zugewandt, weil der einfacher ist". Diese Strategie „lehre ich den Schülern".

Diese vier Experten gingen nach Lehrbuch vor: Sie faktorisierten. Dieser Algorithmus leitete ihre Strukturierungen. Sie bezogen die Koeffizienten horizontal aufeinander, indem sie die gemeinsamen Teiler identifizierten. Die einzelnen Strukturierungen unterscheiden sich aber in den Anwendbarkeitsbedingungen und in der Reihenfolge der hergestellten Bezüge. Einige bezogen zuerst die Koeffizienten des Zählers aufeinander, andere jene des Nenners. Einige bestimmten zuerst den gemeinsamen Faktor der Koeffizienten, andere jenen der Potenzen. Insgesamt sind diese Strukturierungen ähnlich, aber im Detail doch verschieden. Die vertikalen Aspekte sind marginal und beschränken sich erstens auf die Einteilung des Bruchs in unten und oben und auf den Vergleich der ausgeklammerten Faktoren unten mit jenen oben.

Die restlichen Experten produzierten Strukturierungen, in denen sowohl horizontale als auch vertikale Bezüge wichtig waren:

Experte3	
Anwend.	Ich schaue, „ob ich gemeinsame Teiler sehe im Zähler und Nenner“.
Strukt.	Ich sehe „schon die Zahlen, die Koeffizienten 6 und 9, 4 und 6, ich sehe schon, dass da das zweite 1.5-mal das erste ist“.
Kons.	„Dann muss es gehen.“
Abschl.	„Dann musste ich noch überlegen, was ich jetzt als Faktor rausnehmen kann.“

Experte2	
Anwend.	„Ich schaue immer auf gleiche Fakoren im Zähler und im Nenner. Und jetzt, da es bei den Zahlen nichts zu machen gibt, gehe ich auf das Faktorisieren.“
Strukt.	Dann sah ich „die Proportionalität zwischen 4, 6 *(zeigt auf den Nenner)* und 6, 9 *(zeigt auf den Zähler)*“.
Kons.	„Ich habe vermutet, dass da ein gleicher Faktor dahinter steckt.“
Abschl.	„Ja, schön.“

Experte10	
Anwend.	„Es kann ja nur darum gehen zu kürzen, also Stichwort faktorisieren.“
Strukt.	Das Verhältnis „von 6, 9, 4, 6“ ist mir schnell aufgefallen.
Kons.	„Im Prinzip“ kann man kürzen.
Abschl.	„Aber eigentlich, darum musste ich nachher noch rechnen, war ich mir nicht sicher.“

Experte1	
Anwend.	„Eigentlich ist es klar, das muss man wahrscheinlich ausklammern, faktorisieren.“
Strukt.	„Es sind wie zwei Gedanken. Zum einen Mal x^3, x^2, also da kann man das Quadrat ausklammern und dann ist es so wie eine Kontrolle, ob das auch mit den Zahlen funktioniert [...] 6 und 9 und 4 und 6.“
Kons.	„Da muss man ausklammern.“ Sofort sehe ich „das $2(2x+3)$“ und schaue, „ob es dann passt“.
Abschl.	„Wenn man Glück hat“ kann man „$2x + 3$ oben und unten [...] kürzen“.

Experte12	
Anwend.	Ich dachte „wie ein Schüler“. „Wahrscheinlich kann man das vereinfachen oder so. Dann schauen wir mal, können wir da im Nenner etwas ausklammern so, dass das oben erscheint.“
Strukt.	„Im Nenner kann man 2 ausklammern, dann kriegt man $2x + 3$.“ Dann teste ich, „was muss ich im Zähler ausklammern, damit $2x + 3$ übrigbleibt“?
Kons.	„Ich klammere x^2 aus, dann steht noch $6x+9$ da, aber ich brauche $2x+3$, also klammere ich noch 3 aus.“
Abschl.	Zur Sicherheit multipliziere ich die beiden nochmals aus.

Experte3, Experte2, Experte10 und Experte1 bezogen die Koeffizienten horizontal aufeinander indem sie Verhältnisse bildeten, die sie dann vertikal aufeinander bezogen. Experte3 spricht explizit vom Faktor 1.5, Experte2 von Proportionalität. Unterschiede in den Strukturierungen sind einerseits wiederum in der Reihenfolge der Bezüge festzumachen. Die einen bezogen zuerst Teile im Zähler aufeinander, die anderen im Nenner. Andererseits unterschieden sich auch die Anwendbarkeits- und Abschlussbedingungen. Und Experte12 tendierte stark zu rein horizontalen Strukturierungen, jedoch nutzte er vertikale Bezüge mehr als jene Experten, die sowohl horizontale als auch vertikale Bezüge herstellten.

Auf jeden Fall wird klar, dass es mehrere angemessene Strukturierungen eines algebraischen Ausdrucks gibt und nicht nur eine; im Prinzip pro Experte eine.

4.2.8 Vergleich: Novizen und Experten

Den Experten ist gemeinsam, dass sie die Teile aufeinander bezogen, um Vermutungen über einen gemeinsamen Linearfaktor aufzustellen. Das zeichnet die Strukturierungen der Experten aus (ausgenommen jene von Experte9, der nicht vermutete, sondern sofort rechnete). Die Hälfte der Experten bezogen dabei Teile so aufeinander, dass sie ihre Vermutung aufgrund von Proportionalitäten mathematisch rechtfertigen konnten (Experte5, Experte8, Experte3, Experte2, Experte10, Experte1). Wichtig ist hier die Tatsache, dass dazu Teile zumindest teilweise vertikal aufeinander zu beziehen sind. Die restlichen Experten verwiesen auf den Kontext und den Typ der Aufgabe. Sie bezogen die Teile nur aufeinander, um zu testen, ob etwas ausgeklammert werden kann.

Zur Schärfung dieses explorativen Charakters der Strukturierungen der Experten wird ein Blick auf jene der Novizen geworfen (vgl. auch Rüede (2013)). Diese zogen die Teile tendenziell horizontal aufeinander, schlossen daher selten auf Vermutungen, sondern führten einfach die sich daraus ergebenden Umformungen aus. Beispielsweise bezog kein Novize Teile des Ausdrucks vertikal so aufeinander wie die drei Experten Experte5, Experte8 und Experte11 (Seite 92). Sieben Novizen bezogen die Teile jeweils horizontal aufeinander, wie zum Beispiel Novize3.

Novize3	
Anwend.	Mir fielen die x^3 auf, „also das ist einfach, keine Ahnung, so das, was meine Mutter sagen würde. Zuerst immer die x^3 also die x hoch irgendwas loswerden [...] und dann habe ich einfach ausgeklammert“.
Strukt.	„[Es hat] da mal x^2 und die x^3 [...] also x^2 klammere ich aus.“

Kons.	„Und das gibt dann x^2 mal $6x + 9$ [...] dann kann ich die $6x + 9$ noch ausklammern, also die 3 ausklammern, und das gibt dann $3x^2$ mal $2x+3$ und unten klammere ich eine 2 aus und das gibt dann $2x + 3$.“
Abschl.	„Dann kann ich die Klammern kürzen.“

Novize3 bezog Teile aufeinander, um umzuformen und nicht um Vermutungen aufzustellen (oder zu verifizieren) wie die Experten.

Immerhin drei Novizen strukturierten ähnlich wie die Experten und brachten mit ihren Strukturierungen Vermutungen in Verbindung. Beispielsweise bezog Novize6 die Teile horizontal und vertikal aufeinander und nutzte Proportionen. Diese Strukturierung steht im Zusammenhang mit seiner Vermutung der Existenz eines gemeinsamen linearen Faktors.

Novize6	
Anwend.	„Kürzen darf ich hier ja nicht [...] weil es zweimal eine Addition ist.“
Strukt.	Dann habe ich „einfach gleich gesehen 6 und 9 und 4 und 6. Die haben jeweils gemeinsame Teiler“. Und hier habe ich „x^3, x^2, x und kein x“.
Kons.	„Dann habe ich schon gedacht, dass es die gleiche Klammer geben wird.“
Abschl.	„Es schien mir von Anfang an klar.“

Die restlichen zwei Novizen (Novize4 und Novize11) entdeckten während der Bedenkzeit im Interview (als einzige) das Kürzen mit dem linearen Faktor $2x + 3$ nicht, wie die folgenden Passagen zeigen:

Novize4	
Anwend.	„Immer wenn ich gemeinsame Faktoren, also gemeinsame Variablen in einem Bruch sehe, versuche ich diese auszuklammern.“
Struktr.	„Also das x^3 und das x^2. Vor allem das x^2 verschwindet hinten und das x^3 wird irgendwie x. Dann [...] 6 und 9 [...] also 3 und unten 2.“
Kons.	„Aber das lässt sich nicht miteinander kürzen.“
Abschl.	Das war eine „Sackgasse. Ich habe einfach das angeschaut, was vor der Klammer steht. Dann nicht mehr weiter überlegt, was in der Klammer steht.“

Offenbar bezog Novize4 die Teile aufeinander, um die Vorfaktoren zu kürzen. Der Fokus lag nie auf der Klammer, sondern nur auf dem vor der Klammer.

4.3 Zusammenfassung der Resultate

Die Studie über das Strukturieren von Bruchtermen und Bruchtermgleichungen untersuchte drei Fragen. Erstens diente sie der Bildung von Kategorien der Prozesse des Strukturierens, zweitens untersuchte sie die Homogenität der von Experten hergestellten Strukturierungen und drittens fragte sie nach Unterschieden zwischen den Experten und Novizen beim Strukturieren. Die Antworten der Studie auf diese drei Fragen seien nun zusammengefasst.

1. Es gibt vier Kategorien des Strukturierens respektive der Bedeutung von Strukturierungen (Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.6): den Ausdruck optisch einfacher machen, ihn ändern, ihn umstrukturieren oder seine Klassifizierungen erforschen.

2. Jeder Experte strukturiert anders (Abschnitt 4.2.7). Die Prozesse des Strukturierens von den Experten unterscheiden sich sowohl in den Teilen, die sie aufeinander beziehen, als auch in der Reihenfolge der hergestellten Bezüge.

3. Die Experten und Novizen weisen ihren hergestellten Strukturierungen je eine andere Bedeutung zu: Die Experten strukturieren, um den Ausdruck zu erforschen. Novizen strukturieren, um etwas machen zu können (Abschnitt 4.2.8).

Insgesamt legt diese erste Studie die Vielfalt der empirisch beobachtbaren Ausprägung von Strukturierungen und ihren Bedeutungen dar und bietet mit dem Kategoriensystem eine Systematisierung dieser Vielfalt. Es bleiben aber Fragen offen. Ein paar seien hervorgehoben.

1. Es wurden nur Bruchterme und Bruchtermgleichungen verwendet. Entsprechend waren Blickrichtungen wichtig: horizontale, vertikale und diagonale. Essenziell war das Zusammenspiel von Nennern und Zählern und inwiefern die befragten Personen dieses Spiel beherrschten. So stellt sich die Frage, inwiefern die gebildeten Kategorien von den vorgelegten Ausdrücken abhängen. Bieten sich bei einem anderen Typ von Termen und Gleichungen dieselben Kategorien an?

2. Die Validität der Methode des nachträglichen lauten Denkens ist schwierig einzuschätzen (vgl. Abschnitt 3.3.3). Daher besteht eine gewisse Unsicherheit bezüglich der Stabilität des Kategoriensystems. Brächte eine andere Interviewtechnik neue respektive andere Erkenntnisse hervor?

3. Die untersuchten Novizen besuchten allesamt ein Schweizer Gymnasium und sind daher (zumindest im Schnitt) als leistungsstark einzustufen. Wie strukturieren Novizen aus anderen Schultypen?

4. Typischerweise haben Novizen, die vorwiegend gemäß Kategorie 1 oder 2 strukturierten, keine Entdeckungen gemacht. Ihre Strukturierungen sind stark an Verfahren orientiert oder zeigen idiosynkratische Merkmale. Es ist aber anzunehmen, dass auch diese Novizen explorieren und Entdeckungen machen können. Wie sehen dann ihre Strukturierungen aus? Wären diese auch einer der vier Kategorien zuzuordnen?

5. In den einzelnen Kategorien sind sehr wohl Mekmale der Behandlung eines Terms als Prozess, Verfahren oder Objekt zu erkennen. In der Kategorie 1 könnte die Behandlung eines Terms als Prozess eine Rolle spielen, in der Kategorie 2 die Behandlung als Verfahren (verfahrenbasiertes Strukturieren) und in der Kategorie jene als Objekt (explorierendes Strukturieren). Um im Kapitel 6 auch Hypothesen über die Entwicklung des Strukturierens aufstellen zu können, wäre allerdings eine breitere und sicherere Datenlage wertvoll. Natürlich wird eine empirische Untersuchung der Entwicklung des Strukturierens ganz klar außerhalb der vorgelegten Arbeit bleiben.

Die im folgenden Kapitel vorgestellte zweite Studie nimmt sich der Klärung genau dieser Fragen an.

5 Zweite Studie: Lineare Gleichungen

Die Resultate der ersten Studie sind in Abschnitt 4.3 zusammengefasst. Ebenso sind dort jene Aspekte aufgelistet, die offen blieben. Die zweite Studie greift diese Aspekte auf. Es handelt sich dabei um Fragen zum Kategoriensystem, die sich zu folgenden drei Forschungsfragen bündeln lassen.

1. Können die vier Kategorien des Strukturierens (Kapitel 4) reproduziert werden, wenn das Design der Interviews geändert wird?
2. Was sind typische Ankerbeispiele von Strukturierungen bei linearen Gleichungen mit Klammern?
3. Welche Strukturierungen stellen Novizen und Experten her, wenn sie explizit zu alternativen Lösungswegen aufgefordert werden?

Mit der ersten Frage wird geklärt, inwiefern die vier Kategorien von den Spezifika der Studie über Bruchterme und Bruchtermgleichungen abhängen. Sind die Kategorien auf einen anderen Typ von Termen und Gleichungen übertragbar? Liefert die Methode des lauten Denkens andere Informationen als jene des nachträglichen lauten Denkens? Ändert das Erlauben von Papier und Bleistift die empirischen Daten? Führt der Einbezug von Probanden der Sekundarstufe I zu einer neuen Kategorie von Strukturierungen? Mit solchen Fragen wird die Robustheit der Kategorien untersucht. Denn diese sollen möglichst kontextfrei und unabhängig von der Methode sein.

Die zweite Frage zielt auf typische Strukturierungen von linearen Gleichungen mit Klammern. Obwohl in der Mathematikdidaktik das Lösen von linearen Gleichungen gut untersucht ist (Bernard & Bright, 1984; Filloy & Rojano, 1989; Hewitt, 2012; Huntley et al., 2007; Kieran, 1992; Linchevski & Livneh, 1999; Nogueira de Lima & Tall, 2008; Star & Seifert, 2006), liegen erstaunlich wenig Forschungsarbeiten darüber vor, wie Personen lineare Gleichungen strukturieren. Vermutlich hat das damit zu tun, dass die mathematikdidaktische Forschung sich mehrheitlich für die Einführung in das Lösen linearer Gleichungen interessiert. Entsprechend wurden in vielen Studien einfache lineare Gleichungen wie $13x - 4 = 22$ oder $7x + 1 = 5 + 11x$ den Probanden vorgelegt. Doch bei solch einfachen Gleichungen ist nur wenig Strukturierungsarbeit zu machen und daher waren Strukturierungsprozesse wenig relevant respektive empirisch kaum beobachtbar. Aus diesem Grund verwendet die hier vorgestellte Studie anspruchsvollere Gleichungen, insbesondere solche mit Klammertermen (vgl. Abschnitt 3.3.2). Wie gehen Novizen und Experten mit Klammern beim Lösen von linearen Gleichungen um? Finden sich typische Arten der Behandlung von Klammertermen? Auf solche Fragen fokussiert die zweite Forschungsfrage.

Die dritte Frage basiert auf einem wesentlichen Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Studie. In der zweiten Studie werden die Probanden explizit zu anderen Lösungswegen aufgefordert, in der ersten nicht. Mit dieser Aufforderung sollen vor allem die Novizen noch mehr an ihre Grenzen geführt werden. Sie sollen so strukturieren, wie sie es noch nie gemacht haben, sich in unsichere Gefilde wagen. Mit dieser dritten Frage wird das Augenmerk also auf Pfade des Entdeckens gelegt. Beispielsweise weisen Star und Seifert (2006) darauf hin, dass Lernende während solchen entdeckenden Phasen Umformungen wählen, die für sie atypisch und ungewohnt sind. Somit ist zu vermuten, dass mit der Bitte um andere Lösungswege tatsächlich das Potential möglicher Strukturierungen ausgeschöpft wird. Genau das ist nötig, um abschätzen zu können, inwiefern die vier Kategorien vollständig sind und inwiefern ihre gegenwärtigen Beschreibungen umfassend sind. Beispielsweise interessiert es, wie Strukturierungen der Kategorie 2 aussehen, die der Suche nach einem alternativen Lösungsweg dienen.

5.1 Methode

Im Kapitel 3 wurden die methodologischen Grundbausteine gelegt. In diesem Abschnitt werden nun jene Entscheide nachgereicht, welche spezifisch für diese Studie Gültigkeit hatten.

Die Novizen (2 weiblich, 6 männlich) waren 15- bis 17-jährig und am Ende des 9. Schuljahrs. Vier besuchten zum Zeitpunkt der Interviews die Sekundarstufe A, vier die Sekundarstufe B. Dabei bezeichnen A und B die Niveaus auf der Sekundarstufe I im Kanton Zürich. A ist das oberste von insgesamt drei Niveaus (ohne Einbezug des Langgymnasiums). Durch diese Aufteilung der Novizen in jene der Sekundarstufe A und jene der Sekundarstufe B war die Reichhaltigkeit der Gruppe der Novizen gegeben. Alle interviewten Novizen waren im 7. Schuljahr das erste Mal mit Algebra konfrontiert worden. Insgesamt hatten sie alle Erfahrung im Auswerten, Aufstellen und Umformen von Termen, Lösen von linearen Gleichungen, von (einfachen) Bruchtermgleichungen und von Gleichungen der Form $A \cdot B = 0$. Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Die Experten waren 4 Schweizer Mathematiklehrpersonen am Gymnasium (1 weiblich, 3 männlich). Sie besaßen alle ein Universitätsdiplom in Mathematik, ein Lehrdiplom in Mathematik und mindestens zehnjährige Unterrichtserfahrung am Gymnasium (inklusive Langgymnasium). Darüber hinaus verfügten sie über Zusatzqualifikationen als Mathematikdozenten an einer Hochschule (2), hatten promoviert (2), waren Lehrbuchautoren (3) oder in die berufspraktische Ausbildung von Lehramtsstudierenden des Gymnasiums involviert (3). Die Teilnahme am Interview war freiwillig.

Novizen und Experten wurden an ihren Schulen interviewt. Die Interviews wurden videografiert und anschließend, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, ausgewertet. Alle Interviews wurden im Rahmen einer Masterarbeit an der PHZH von Frau Evelyne Emler und Frau Saskia Hauser durchgeführt und transkribiert.

5.2 Resultate

In diesem Abschnitt werden die Resultate dargelegt. Die Darstellung folgt den drei Teilen der Forschungsfrage.

5.2.1 Kategorisierung

Insgesamt wurden 77 zentrale Strukturierungen identifiziert, rekonstruiert und kategorisiert. Es drängte sich keine fünfte Kategorie auf. Die vier Kategorien scheinen demnach vollständig und unabhängig vom Aufgabentyp zu sein.

Die Verteilung der Strukturierungen auf die vier Kategorien, auf die Novizen der Sekundarstufe A respektive B und auf die Experten ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Diese Zusammenstellung soll keine quantitativen Befunde hervorheben, sondern bloß die Kategorisierung illustrieren: Die Novizen stellten 52 Strukturierungen her, die Experten deren 25. Über die Hälfte (nämlich 35) der Strukturierungen der Novizen wurden der Kategorie 2 zugeordnet. Alle Strukturierungen der Experten waren hingegen von der Kategorie 4. Bei den Novizen führte die Aufforderung zu einem anderen Lösungsweg vermehrt auch zu Strukturierungen der Kategorie 3, bei Niveau A stärker als bei Niveau B. Hingegen konnten die alternativen Strukturierungen der Experten wie erwartet immer noch der Kategorie 4 zugeordnet werden.

Neben dem Typ der Ausdrücke sind in der zweiten Studie auch methodische Bedingungen verändert worden. Insgesamt scheinen diese Änderungen die Art der empirischen Daten positiv beeinflusst zu haben. Es sei aber betont, dass diese Feststellung nicht systematisch validiert wurde, sondern mehr einem subjektiven Eindruck entspricht, der im Rahmen der Auswertung entstand:

– Die Interviews waren mindestens so reichhaltig wie jene der ersten Studie. Vielleicht fällt es den Probanden leichter, darüber zu berichten, was sie gerade denken, als darüber, was sie gerade vor einer Minute dachten.

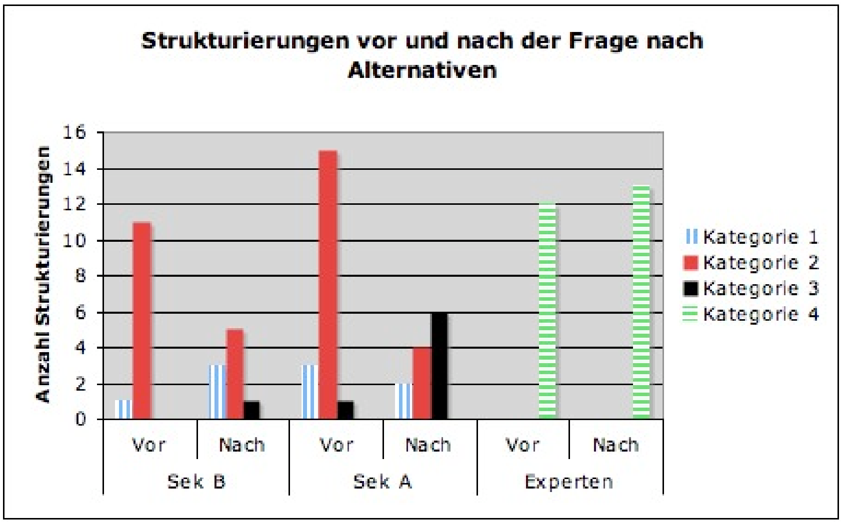

Abbildung 5.1: Verteilung der 77 Strukturierungen auf die vier Kategorien, die Schulniveaus und den Zeitpunkt ihrer Herstellung. Abkürzungen: Sek A (Sekundarstufe A), Sek B (Sekundarstufe B), Vor (Vor der Frage nach Alternativen), Nach (Nach der Frage nach Alternativen).

– Das Zulassen von Bleistift und Papier führte zu zwei Effekten. Erstens schienen die wenig fortgeschrittenen Probanden auskunftsfreudiger als die in der ersten Studie zu sein. Zweitens schaffte das Notieren von Umformungen zum Teil mehr Klarheit. Die schriftlichen Inskriptionen können deutlicher machen, was eine Person meint, und sie kann zudem mit dem Finger auf Konsequenzen von Strukturierungen zeigen, indem sie auf Teile in der umgeformten Gleichung tippt.

– Die vorgelegten linearen Gleichungen waren für die Experten deutlich einfacher als die Bruchterme und Bruchtermgleichungen in der ersten Studie. Sie zögerten nie. Erstaunlicherweise waren die verbalen Daten trotzdem reichhaltig. Vielleicht lag das an der Methode des lauten Denkens. Denn dadurch könnte das Denken der Experten leicht verlangsamt worden sein.

5.2.2 Ankerbeispiele: Kategorie 1

Die Strukturierungen dieser Kategorie orientierten sich an optischen Auffälligkeiten, die zu idiosynkratischen Bezügen zwischen Teilen einer Gleichung führten. Oftmals resultierten aus diesen Strukturierungen deutliche, allerdings inkorrekte Vereinfachungen. Allerdings schienen die Probanden auf solche

„Kurzschlüsse“ sensibilisert zu sein, denn sie verwarfen die entsprechenden Strukturierungen in aller Regel. Zur Illustration zwei Beispiele.

Novize6 (w, Sek A) strukturierte die zweite Gleichung $7(16+3x) = 100 - 3(16+3x)$ zuerst so, dass sie die Vorfaktoren auf die Klammerinhalte bezog und schließlich ausmultiplizierte (Kategorie 2). Dann wurde sie gefragt, wie man dies auch noch lösen könne. Dies führte zur folgenden Strukturierung der Kategorie 1:

Anwendbarkeitsbedingung: Jetzt fällt mir auf, „dass beide Male das hier so ist *(zeigt auf die beiden Klammern)*. Also es ist genau der gleiche Inhalt [...] in der Klammer“.

Strukturierung: „Man kann die Klammern streichen.“

Konsequenz: „7 gleich 100. “

Abschlussbedingung: „Nein, man darf [das] nicht, weil dann würde x wegfallen.“

Eindrücklich ist, dass Novize6 bei ihrem ersten Lösungsweg nicht bemerkte, dass auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Klammer $(16 + 3x)$ vorkommt. Erst auf die Bitte nach Alternativen fiel ihr das auf, wie obige Anwendbarkeitsbedingung belegt. Diesbezüglich war sie erstaunlicherweise kein Einzelfall. Gut die Hälfte der Novizen bemerkte solche Gleichheiten erst spät, wenn überhaupt, oftmals erst nach der Bitte um einen zweiten Lösungsweg. Auch Novize6 wurde erst nach dieser Bitte auf die beiden gleichen Klammern $(16+3x)$ aufmerksam. Offenbar musste sie sich dazu vom Verfahren des Ausmultiplizierens, Zusammenfassens und Isolierens von x lösen. Dann stellte sie Bezüge her, die bis dahin nicht relevant waren, beispielsweise bezog sie die beiden Klammern aufeinander. Die entsprechende Strukturierung bestand in einer starken optischen Vereinfachung: „Man kann die Klammern streichen.“ Interessant ist ihr Argument für das Verwerfen dieser Strukturierung: Das Wegfallen des x. Vermutlich verbindet Novize6 mit dem Wegfallen der Unbekannten die Unmöglichkeit, am Schluss $x = \ldots$ zu schreiben. Das heißt, dann wäre ihr Standardverfahren nicht mehr ausführbar.

Burton (1988, S. 3) beschreibt einen ähnlichen Fall, bei dem Schülerinnen und Schüler die Zahl 488 im Ausdruck

$$|f^4(x)| = \left|\frac{6x\sin x + 32x\cos x - 72x\sin x - 120x\cos x + 105\sin x}{16x^{\frac{9}{2}}}\right| \leq 488$$

nicht sahen. Sie zitiert beispielsweise eine Schülerin, die sich „zwingen“ musste, das Ende der Zeichenreihe anzuschauen. Darüber hinaus betont Burton, dass es dabei nicht darum ging, dass die Probanden die Relevanz von 488 nicht erkannten, sondern, dass sie diese tatsächlich nicht gesehen hatten, respektive analog zu Novize6, erst auf Nachfrage.

Ein zweites Beispiel einer Strukturierung der Kategorie 1 bezieht sich auf die dritte Gleichung, $4(3x+9) = (7x-2) \cdot 18 - 18(7x-2)$. Hier strukturierte Novize6 gleich zu Beginn gemäß der Kategorie 1:

Anwendbarkeitsbedingung: *(Schaut kurz auf die Gleichung)*

Strukturierung: „18 minus 18."

Konsequenz: Dass „das [...] 0 geben würde".

Abschlussbedingung: „Aber man darf das genau nicht rechnen, [denn] jetzt habe ich gesehen, dass da eigentlich auch ein Mal ist *(zeigt auf das Mal zwischen der Klammer und der 18)*, das heisst, es ist eine eigene Distributivgesetzrechnung."

Diese Strukturierung stand am Anfang eines längeren Strukturierungsprozesses, der schließlich in einer Umstrukturierung mündete. Der Einstieg zeigt die erste Begegnung mit der Gleichung. Novize6 bildete auf der rechten Seite nicht etwa zwei Teile $(7x-2) \cdot 18$ und $18(7x-2)$, sondern sie fokussierte auf die beiden 18, die optisch exakt gleich aussehen. Diese beiden 18 bezog sie aufeinander, der Rest blieb vorerst unberücksichtigt. Sie erwog, 18 von 18 zu subtrahieren. In einem zweiten Blick revidierte Novize6 diese Strukturierung. Sie baute sich die rechte Seite langsam auf, indem sie weitere Zeichen einbezog. Das Malzeichen wurde wichtig und erlaubte, die beiden Klammern je auf die entsprechenden 18 zu beziehen. Konsequenterweise verwarf Novize6 ihre erste Strukturierung.

Strukturierungen der Kategorie 1 orientieren sich an Ähnlichkeiten. Entscheidend dabei ist, dass die Person bestimmt, was für sie ähnlich, gleich oder einfach ist. In obigen zwei Beispielen waren die ähnlichen Teile in offensichtlicher Art und Weise ähnlich. Es wurden aber auch zwei Strukturierungen der Kategorie 1 identifiziert, wo die Ähnlichkeiten auf ausgeprägten, personalen Prioritäten beruhten. Zum Beispiel bezog Novize3 bei der Gleichung $13(x-6)+15 = 15$ auf der linken Seite die -6 additiv auf die $+15$. Der Grund lag im Wunsch, „eine positive Zahl" zu haben. Offenbar störte die -6. Vermutlich erschien ihm die Rolle der $+15$ direkt daneben am ähnlichsten. Er behandelte die -6 und die $+15$ als zwei Summanden. Da Novize3 allerdings unsicher über die Korrektheit der sich ergebenden Umformung war, verwarf er die Strukturierung sofort wieder. Auf jeden Fall war diese Strukturierung wesentlich von der konkreten zweidimensionalen Anordnung der einzelnen Zeichen in der Gleichung bestimmt. Das rechtfertigte die Zuordnung zur Kategorie 1. Die Verrechnung der als ähnlich aufgefassten Teile orientierte sich immer an den gegebenen Operationszeichen. Insofern wurde ein Prozess ausgeführt, allerdings kein intendierter.

5.2.3 Ankerbeispiele: Kategorie 2

Deutlich über die Hälfte aller Strukturierungen der Novizen gehören dieser Kategorie an. Im Folgenden werden zwei typische Fälle vorgestellt, die von erhellendem Charakter sind. Sie illustrieren, wie die Novizen die Klammern in den linearen Gleichungen behandelten.

Temporale Behandlung von „Punkt vor Strich"

Damit algebraische Ausdrücke übersichtlicher geschrieben werden können, ist es erlaubt, gewisse äußere Klammern wegzulassen und etwa $(13(x-6))+15$ als $13(x-6)+15$ zu schreiben. Weil so aber die Darstellung algebraischer Ausdrücke mehrdeutig wird, muss die Hierarchie der Operationen mit folgender Regel festgelegt werden: Punktoperationen binden stärker als Strichoperationen. Das heißt, wenn in $13(x-6)+15$ zwecks Herstellung der Eindeutigkeit wieder Klammern gesetzt würden, dann wäre zuerst die Punktoperation abzuklammern: $(13(x-6))+15$.

Im Mathematikunterricht ist diese Darstellungsregel allgegenwärtig unter dem Namen „Punkt vor Strich". Man meint damit, dass die Punktoperation stärker bindet als die Strichoperation. Im Unterricht wird dies oft handlungsnah übersetzt, etwa mit „Man rechnet die Punktoperationen vor den Strichoperationen". Dass das Kürzel „Punkt vor Strich" aber auch anders verstanden werden kann, haben die hier durchgeführten Interviews gezeigt. Sehr oft behandelten die Novizen die Regel „Punkt vor Strich" nämlich rein „temporal". Sie behandelten sie als Handlungsanweisung: Führe in jedem Fall zuerst die Punktrechnungen aus, bevor du die Strichrechnungen anpackst. Sie behandelten „Punkt vor Strich" als zeitlich gestaffelte Handlungsanweisung und nicht als konventionale Hierarchie, die die Stärke der Bindung der Operationszeichen bestimmt. Daraus folgten Strukturierungen, die unangemessen waren, obwohl sie zu korrekten Umformungen führten. Zur Illustration stelle ich hier Novize8 (w, Sek A) vor, die die erste Gleichung $13(x-6)+15=15$ zu Beginn folgendermaßen strukturierte.

Anwendbarkeitsbedingung: Ich schaue „so, wie ich etwas lesen würde, [von] links nach rechts. [...] Auf die Klammer. [Denn] man muss ja zuerst Malrechnungen [...] also Punktrechnungen ausrechnen [...] bevor man Strichrechnungen ausrechnet."

Strukturierung: „13 mal x minus 6."

Konsequenz: „Ausmultiplizieren und [...] minus 15.“

Abschlussbedingung: „Es geht auf.“

Novize8 drückt in der Anwendbarkeitsbedingung aus, wie sie „Punkt vor Strich“ behandelt: „Man muss zuerst Malrechnungen [...] ausrechnen [...], bevor man Strichrechnungen ausrechnet.“ Vermutlich aus diesem Grund fiel ihr die Klammer auf und sie multiplizierte diese sofort aus. Die sich ergebende Umformung war richtig, und das ist unbedingt hervorzuheben. Novize8 addierte etwa nicht fälschlicherweise $(x - 6)$ zu 15 und multiplizierte erst dann mit 13.

Leider wirkte diese Behandlungsweise von „Punkt vor Strich“ auch hinderlich. Sie behinderte Novize8 beim beidseitigen Subtrahieren von 15. Novize8 zögerte, auf beiden Seiten der Gleichung $13(x - 6) + 15 = 15$ zuerst 15 zu subtrahieren. Denn das ist eine Strichrechnung und mit der darf man nichts machen, bevor nicht die Punktrechnung $13(x - 6)$ ausgeführt ist. Ihre zweite Strukturierung, die sie nach der Bitte um einen zweiten Lösungsweg herstellte, dokumentiert genau das.

Anwendbarkeitsbedingung: *(Schaut auf die Gleichung)*

Strukturierung „Man kann zuerst minus 15 machen.“

Konsequenz: „$13x$ minus 6 [...] ist gleich 0.“

Abschlussbedingung: Ich bin unsicher, da „man eigentlich ja nicht Strich vor Punkt machen darf“.

Leider blieb im Interview unklar, wie die Schülerin auf den Bezug der beiden 15 aufeinander geführt wurde. Gut möglich, dass allein die Frage nach einem zweiten Lösungsweg diesen Perspektivenwechsel evozierte. Trotzdem belegt das Beispiel, wie stark diese temporale Behandlungsweise von „Punkt vor Strich“ die Schülerin beim subtraktiven Bezug der beiden 15 aufeinander verunsicherte.

Andere Novizen argumentierten sehr ähnlich. Die Pflicht, zuerst $13(x - 6)$ auszumultiplizieren, verhinderte, dass sie die Möglichkeit in Betracht zogen, zuerst etwas anderes zu machen.

Das x muss aus der Klammer raus

Das Standardverfahren für das Lösen von linearen Gleichungen besteht im Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Isolieren von x (Star & Seifert, 2006). Im Algebraunterricht üben die Schülerinnen und Schüler diese Verfahren entsprechend intensiv. Sie tendieren dann oftmals wie bei der Regel „Punkt vor Strich“ dazu, das Standardverfahren als Handlungsanweisung bei linearen

Gleichungen zu behandeln. Eine lineare Gleichung wird zum Befehl für das Ausmultiplizieren, denn solange nicht ausmultipliziert ist, kann nicht zusammengefasst werden. Erst wenn ausmultipliziert ist, liegt das x „nackt" vor, wie eine Probandin erklärte. Und erst dann kann mit ihm etwas gemacht werden. Das folgende Beispiel konkretisiert eine solche Strukturierung. Diese stellte Novize1 (m, Sek B) gleich zu Beginn bei der Gleichung $13(x-6)+15=15$ her.

Anwendbarkeitsbedingung: „Sobald ich eine Gleichung sehe, schaue ich automatisch zuerst auf die Klammern. [...] Ich probiere dann [...] anzuschauen, was dort drin ist [...], und sofern es in der Klammer ein x hat, [will] ich die Klammern zuerst wegbringen. [...] Weil in de[r] Klammer ist wie etwas drin. [...] Darum schaue ich zuerst, dass es zuerst einfacher ist zu rechnen, dass man nur mit plus und minus rechnet."

Strukturierung: „13 mal x und 13 mal 6."

Konsequenz: Dann würde ich „plus 78 rechnen".

Abschlussbedingung: *(Rechnet aus und erhält schließlich $x = 6$)*

Novize1 fokussierte auf die Klammern. Er schaute, „was dort drin ist". Es war ein x „dort drin" und dieses musste raus. Darum multiplizierte er aus und bezog die 13 multiplikativ auf das x und auf die 6. Mit der Aussage „Darum schaue ich zuerst, dass es zuerst einfacher ist zu rechnen, dass man nur mit plus und minus rechnet" wird klar, warum er das x nicht mehr in der Klammer haben wollte. Solange das x in der Klammer ist, kann er nicht alle Terme mit und alle Terme ohne x zusammenfassen. Und dieses Zusammenfassen ist das Ziel. Dabei stören die Klammern, also müssen sie weg. In Hewitt (2003, S. 65) ist ein ähnlicher Fall vorgestellt. Gemäß jenem Autor bewirkt das Ausmultiplizieren einer Klammer „that the x is ‚visually free' to be manipulated on its own".

Fazit

Nahezu alle Novizen multiplizierten zu Beginn sofort aus. Die Klammern waren offenbar ein Befehl für das Ausmultiplizieren. Obige zwei Typen sind als zwei Behandlungsweisen zu verstehen, als was dieser Befehl begriffen werden kann. Erstens kann die Regel „Punkt vor Strich" als zeitlich sukzessive Handlungsweise behandelt werden. Dann wird immer zuerst ausmultipliziert, bevor der Rest angepackt wird, um nicht gegen diese Regel zu verstoßen. Zweitens kann ein x in der Klammer nicht (additiv respektive subtraktiv mit den restlichen x) zusammengefasst werden – dann wird immer zuerst ausmultipliziert, damit es „frei“ wird. Es gab aber weitere Strukturierungen, die als Beispiele für die Ausführung des Befehls des Ausmultiplizierens verstanden werden können,. Immer waren es Möglichkeiten, wie die offenbar gelehrte Strategie des „Zuerst die Klammern weg“ auch noch verstanden werden kann.

Solche Strukturierungen dominierten jene Passagen im Interview, wo noch nicht nach einem alternativen Lösungsweg gefragt worden war. Sobald aber darum gebeten wurde, strukturierten die Novizen zum Teil so, dass ganz andere Merkmale von Strukturierungen der Kategorie 2 sichtbar wurden. Diesen Strukturierungen ist ein separater Abschnitt gewidmet (5.2.6).

5.2.4 Ankerbeispiele: Kategorie 3

Die drei Gleichungen in der Studie waren so konstruiert, dass Umstrukturierungen erwartet werden durften. Aus fachlicher Sicht konnten alle Gleichungen durch Ausmultiplizieren gelöst werden. Der einfachste Weg bestand hingegen darin, dass man nicht ausmultiplizierte. Nur die Experten wählten diesen Weg als ersten – und Ausmultiplizieren als zweiten. Aber auch ein paar Novizen entdeckten diesen einfachen Weg und einige davon durch Umstrukturierung. Zwei dieser Beispiele sind in diesem Abschnitt vorgestellt.

Das erste Beispiel zeigt eine Umstrukturierung, in der einem Minuszeichen zuerst die Bedeutung eines Vorzeichens und dann jene eines Operationszeichens zugewiesen wurde. Akteurin ist Novize8 (w, Sek A). Sie multiplizierte bei der Gleichung $4(3x+9) = (7x-2)\cdot 18 - 18(7x-2)$ zuerst die rechte Seite aus. Hintergrund war eine Strukturierung der Kategorie 2:

Anwendbarkeitsbedingung: „Die Klammern sind eigentlich das Gleiche. Es ist immer 18-mal die Klammer und da auch *(zeigt dies zuerst an der linken, dann an der rechten Klammer)*. Und nachher habe ich auf [...] das Operationszeichen geschaut und es ist ja da minus. Das heisst ja, dass das Operationszeichen da drin ein Plus wird *(zeigt auf das Minus in der hintersten Klammer)*“. Jetzt „zuerst einmal alles ausklammern, damit ich nur noch Zahlen habe“.

Strukturierung: „18 mal $7x$.“

Konsequenz: „*(rechnet weiter)* Das gibt zusammen 0.“

Abschlussbedingung: „Das ist $12x$ plus 36 [...] gleich 0. [Es] ist eigentlich klar für mich, dass es eine gute Lösung gibt. Weil 12 und 36 sind alle in der Reihe von einer gleichen Zahl.“

Obige Strukturierung dokumentiert, wie Novize8 das Subtraktionszeichen als Vorzeichen behandelte. Die zentrale Aussage ist, „dass das Operationszeichen da drin ein Plus wird“. Damit drückte Novize8 die Bedeutung aus, die sie diesem Subtraktionszeichen zugewiesen hatte. Sie bezog -18 und nicht bloß 18 auf die Klammer. Konsequenterweise behandelte sie die rechte Seite als zwei Klammern, die auszumultiplizieren und anschließend zusammenzurechnen sind. Diese ganze Strukturierung ist vermutlich eine (Anwendbarkeits-)Bedingung der anschließenden Umstrukturierung:

Anwendbarkeitsbedingung: „Was mir jetzt gerade aufgefallen ist, ist dass diese zwei Rechnungen eigentlich das Gleiche sind *(zeigt auf* $(7x-2)\cdot 18$ *und* $18(7x-2)$*)*."

Strukturierung: „Wenn das minus ist *(zeigt auf* -18*)*, dann minus die ganze [...] Rechnung."

Konsequenz: „Nachher könnte [man] eben auch so eine Nullgleichung machen."

Abschlussbedingung: Das wäre „am schnellsten".

Das ist eine Strukturierung der Kategorie 3, also eine Umstrukturierung, und dokumentiert einen Strukturierungsprozess von innen nach außen analog zum Beispiel in Rüede (2012c, S. 133–134). In der obigen ersten Strukturierung der Kategorie 2 hatte Novize8 sowohl $(7x-2)\cdot 18$ als auch $18(7x-2)$ je einzeln behandelt und zwar als Multiplikation eines Vorfaktors mit einer Klammer. Sie multiplizierte aus, fasste zusammen, isolierte x und löste auf. Sie fokussierte auf das Innere der beiden Multiplikationen. Erst nach der Ausführung dieses Standardverfahrens und nach der Aufforderung zu einem zweiten Lösungsweg wechselte Novize8 die Perspektive. Sie verglich die beiden Teile links und rechts des Subtraktionszeichens. Sie begann, sich langsam nach außen zu arbeiten. Mit der Aussage „dass diese zwei Rechnungen eigentlich das Gleiche sind" verbindet sie ihre aktuelle Erkenntnis mit ihrer ersten Strukturierung der Kategorie 2. Das Wort „Rechnungen" deutet darauf hin, dass sie $(7x-2)\cdot 18$ und $18(7x-2)$ zu Beginn ausgerechnet und das Ergebnis 0 der rechten Seite noch im Kopf hatte und erst jetzt begriff, dass die beiden Teile dasselbe geben müssen. Sie sprach das Gesetz der Kommutativität nicht explizit an. Vermutlich nahm sie es implizit an. Auf jeden Fall war sie dann in der Lage, die ganze rechte Seite von außen zu betrachten: „dann minus die ganze Rechnung". Das Wort „ganze" macht diesen Wechsel von innen nach außen nochmals klar. Es geht um $18(7x-2)$ als Ganzes. Das Subtraktionszeichen wird zum Operationszeichen, das auf den ganzen Teil $18(7x-2)$ wirkt. Novize8 behandelte die rechte Seite schließlich als Minuend minus Subtrahend. Dass sie dann sogar von einer „Nullgleichung" sprach, ist das Tüpfchen auf dem i. Durch die Umstrukturierung der rechten Seite konnte sie vermutlich auch die linke Seite umstrukturieren, nämlich zu einem Produkt, das gleich 0 ist.

Umstrukturierungen müssen aber nicht immer solch große Umwälzungen mit sich bringen. An einem zweiten Beispiel wird illustriert, dass schon im Kleinen umstrukturiert werden kann. Wiederum wechselt die Bedeutung desselben Minuszeichens in der Gleichung $4(3x+9) = (7x-2) \cdot 18 - 18(7x-2)$. Allerdings nicht mit derselben Stringenz. Akteurin ist diesmal Novize6 (w, Sek A). Sie behandelte die Gleichung zuerst verfahrenbasiert und strukturierte gemäß der Kategorie 2, insgesamt sehr ähnlich zu Novize8 oben. Als Konsequenz multiplizierte sie rechts aus, fasste zu 0 zusammen und erhielt schließlich $x = -3$. Dann wurde Sie um eine Alternative gebeten:

Anwendbarkeitsbedingung: „Man könnte dieses mal 18 nach vorne nehmen [...] Dann rechne ich ja das *(zeigt auf die 18 näher beim Gleichheitszeichen)*, das ist ja ein Plus, mal das *(zeigt auf die Klammer näher beim Gleichheitszeichen).*

Strukturierung: „Und dann hat man innen [...] einmal eine positive Zahl und einmal eine negative Zahl beidseits [...] das heisst [...], wenn man da jetzt einfach *(zeigt auf die beiden 18)* 1 hätte, würde da $7x$ sein und minus 2 *(zeigt auf erste Klammer rechts)* und da minus $7x$ und plus 2 *(zeigt auf zweite Klammer rechts)* [...] Hier *(zeigt auf* $(7x-2) \cdot 18$*)* bleib[en] die Zeichen [...] und da *(zeigt auf die* $-18(7x-2)$*)* ändern sich die Zeichen."

Konsequenz: „Und das hebt sich dann ja auch wieder auf."

Abschlussbedingung: Das heisst, „dass eigentlich die ganze Rechnung gestrichen wird".

In der ersten Strukturierung hatte Novize6 die $\cdot 18$ auf die $(7x-2)$ bezogen, ausmultipliziert und dann die $18(7x-2)$ angepackt. Sie arbeitete die Klammern je einzeln ab. Das Minuszeichen behandelte sie als Vorzeichen. Erst nachdem sie ausmultipliziert hatte, bezog sie rechts die Terme mit x und jene ohne x aufeinander und fasste sie zu 0 zusammen. Diese Erkenntnis nutzte sie zur obigen Umstrukturierung. In obiger Anwendbarkeitsbedingung machte sie ihre erste Strukturierung nochmals explizit, allerdings leicht variiert, nämlich unter Nutzung der Kommutativität. Dann bezog sie die beiden $7x$ aufeinander, ebenso die beiden 2, und zwar jeweils als Minuend minus Subtrahend. Ihre Bezüge gingen daher über das zentrale Minuszeichen hinaus. Die Umstrukturierung umfasste die ganze rechte Seite und nicht mehr nur den einen Teil $(7x-2) \cdot 18$.

Allerdings behandelte sie das zentrale Minuszeichen nicht einzig als Operationszeichen. Es war bei der Umstrukturierung sowohl Vorzeichen als auch Operationszeichen. Einerseits war der Vorzeichenwechsel der Klammerinhalte wichtig. Andererseits behandelte Novize6 das zentrale Minuszeichen gleichzeitig auch als Operationszeichen, nämlich indem sie die Terme mit x subtraktiv aufeinander bezog, ebenso jene ohne x.

5.2.5 Ankerbeispiele: Kategorie 4

Alle Strukturierungen, die von Experten hergestellt wurden, konnten der vierten Kategorie zugeordnet werden. Bei allen drei Gleichungen strukturierten die Experten vergleichbar – aber individuell unterschiedlich, vgl. auch Abschnitt 4.2.7. Sie strukturierten zu Beginn immer so, dass sie nicht auszumultiplizieren brauchten. Erst auf die Bitte nach einem anderen Lösungsweg diskutierten sie das Ausmultiplizieren. Sie nutzten ihre Unterrichtserfahrung zur Simulation von typischen korrekten wie auch inkorrekten Schülerlösungen.

Im Folgenden sind zwei Strukturierungen von Experten dargestellt, die jeweils zum einfachsten Weg führten. Sie dokumentieren das Erforschen der entsprechenden Gleichung. Im ersten Beispiel strukturierte Experte1 (w) die Gleichung $4(3x + 9) = (7x - 2) \cdot 18 - 18(7x - 2)$.

Anwendbarkeitsbedingung: Ich frage mich: „Was ist die Idee von dieser Aufgabe? Wieso ist sie so gestellt? Und nicht sofort: Was ist die Lösung? [...] Was soll man lernen in dieser Aufgabe?“ Meist suche ich dann „immer erst die Variablen [...] Gibt es eine oder mehrere? Wenn es eine gibt: Welche Potenz hat sie? Und wenn es dann die erste Potenz ist, wenn ich das weiss, schaue ich, wie ich es lösen kann. Dann schaue ich eigentlich den Rest genauer an und sehe dann ‚Oh, das geht schön auf da‘. [...] Und das [hier] ist wieder eine Gleichung mit nur x als Variable, keine andere Variable, auch keine Potenzen von x, also es ist eine lineare Gleichung. Es sind wieder Klammern und zwar nicht immer die gleichen Klammern. Aber rechts hat es die gleiche Klammer, zweimal.“

Strukturierung: „Es ist zwar ein bisschen anders aufgeschrieben, aber es steht beides gleich [...] Und gerade weil es da mit dem Mal nach hinten und da mit der 18 vorne ist, ist es für mich auf den ersten Blick nicht sofort gleich *(zeigt dies auf der rechten Seite der Gleichung)*. Es ist 18 mal die Klammer $7x$ minus 2 mit dem Minus dazwischen.“

Konsequenz: „Also ist das 0 rechts. Das heisst, die linke Seite muss auch 0 sein, das heisst, die Klammer $3x$ plus 9 muss 0 sein und dann ist x minus 3.“

Abschlussbedingung: „Sehr schön.“

Experte1 stellte Fragen an die Gleichung. Das stand bei ihr am Anfang. So erforschte sie den Ausdruck. Die Fragen ermöglichten einerseits eine Klassifikation der Gleichung, andererseits erlaubten sie auch eine Untersuchung möglicher Lösungswege. Dabei war es hilfreich, die Rolle derjenigen Person einzunehmen, die die Aufgabe konstruiert hatte. Daher stellte sich Experte1 die Frage nach „der Idee“ der Aufgabe. Nach dieser Erkundungsphase ist das Lösen nur noch eine lästige Übung.

Auch im zweiten Beispiel ist dieses Erforschen das Hauptthema. Darüber hinaus illustriert es die Validierungen von Vermutungen, die bei solch forschenden Vorgehensweisen laufend aufgestellt werden. Dargestellt ist die erste Strukturierung von Experte4 (m) bei der Gleichung $7(16+3x) = 100-3(16+3x)$.

Anwendbarkeitsbedingung: „Ich fange sicher nicht sofort an zu rechnen. Sondern ich schaue erst einmal, kann ich mir das Leben möglichst einfach machen? [...] Wie sagt Nietzsche? Das erste Zeichen der Geistigkeit ist, auf einen Reiz nicht sofort zu reagieren. Also nicht sofort irgendwie alles auszumultiplizieren. [...] Dann sehe ich also, dass ich die beiden Sachen *(zeigt auf die beiden gleichen Klammern)* zusammenbringen möchte.“

Strukturierung: „Ich [bringe] das *(zeigt auf die rechte Klammer)* halt da *(zeigt auf die linke Seite)* rüber.“

Konsequenz: „Und dann habe ich da halt 10 mal diesen Term stehen. Und wenn da 10 mal dieser Term steht, dann kann ich das *(zeigt auf die 100)* auch durch 10 teilen [...] Und dann check ich vielleicht nochmals, weil das jetzt doch ein bisschen schnell gegangen ist, ob das richtig ist. Das ist richtig und das ist auch richtig *(macht verschiedene Bewegungen mit dem Kugelschreiber)*.“

Abschlussbedingung: „Dass ich durch 10 teilen kann, das kann kein Zufall sein, also [...] ist das irgendwie hübsch designt [...] Jetzt bleibt da nicht mehr so viel übrig als dann halt zu sagen, dass [...] minus 6 steht und dann minus 2. Und dann check ich vielleicht nochmal *(10 s Pause)* sollte schon stimmen.“

Experte4 brachte mit dem Zitat von Nietzsche seinen Prozess des Strukturierens auf den Punkt. Er strukturiert, um zu erforschen. So will er einschätzen können, welchen Weg er einschlagen soll. Ebenso auffällig ist, wie er zu kontrollieren beginnt, sobald er konkret umformt. Dieses ständige Überprüfen von Rechenschritten war auch bei Experte3 (m) zu beobachten. Auch dieser kontrollierte nicht erst das Schlussresultat, sondern seine einzelnen Schritte. Die Novizen zeigten sehr selten solche Kontrollen.

5.2.6 Strukturierungen nach Aufforderung zu Alternativen

In den Interviews wurden die Novizen und Experten jeweils bei jeder Gleichung zu alternativen Lösungswegen ermuntert. Die unter dieser Prämisse hergestellten Strukturierungen sind Thema dieses Abschnitts. Die Beantwortung des dritten Teils der Forschungsfrage dieser Studie steht nun also im Zentrum.

Es kann festgehalten werden, dass nach dieser expliziten Aufforderung im Interview die Novizen die entsprechende Gleichung entweder neu strukturierten oder umstrukturierten. Im ersten Fall produzierten sie Strukturierungen der Kategorie 1 oder 2, im zweiten Fall solche der Kategorie 3. Es kam aber vereinzelt bei einer Gleichung auch vor, dass ein Novize trotz Aufforderung zu einem alternativen Lösungsweg keine andere Strukturierung vorschlug. Hingegen produzierten alle Experten nach der Aufforderung zu alternativen Lösungswegen weitere Strukturierungen, und zwar allesamt der Kategorie 4. Ihre Leitfrage war jeweils: Wie könnte eine Schülerin oder ein Schüler diese Gleichung strukturieren?

Die konkreten Strukturierungen sowohl der Novizen als auch der Experten werden nun getrennt diskutiert.

Die Strukturierungen der Novizen

Wie oben erwähnt, strukturierten die Novizen entweder neu oder um. Der Fall der Umstrukturierung zeigte die erwarteten Merkmale, wie sie in Abschnitt 5.2.4 dargelegt sind. Daher wird hier auf die neuen Strukturierungen fokussiert, das sind die Strukturierungen der Kategorie 1 und 2. Es wird vor allem dargelegt, warum in diesen Fällen von „neuen“ Strukturierungen gesprochen wird und nicht von Umstrukturierungen. Der entscheidende Punkt dabei wird sein, dass die Novizen die Konsequenzen der neuen Strukturierungen – wenn überhaupt – als dieselben Konsequenzen wie bei den „alten“ Strukturierungen erkannten und nicht die neue Strukturierung als Strukturierung dessen, was die „alte“ strukturierte.

Ein Beispiel: Novize3 (m, Sek B) behandelte die erste Gleichung $13(x - 6) + 15 = 15$ zuerst als Befehl für das Ausmultiplizieren. Die entsprechende Strukturierung ist von der Kategorie 2. Im Interview löste Novize3 mit diesem Standardverfahren die Gleichung korrekt auf und wurde dann aufgefordert, die Gleichung anders zu lösen. Dann produzierte er eine Strukturierung der Kategorie 1:

Anwendbarkeitsbedingung: Ich möchte „eine positive Zahl“.

Strukturierung: „Also, ich weiss nicht, ob man das *(zeigt auf die 15 auf der* *linken Seite der Gleichung)* jetzt zu dem *(zeigt auf die* -6 *in der Klammer)* hinzuzählen könnte."

Konsequenz: *(schreibt* $13(x+9)=15$*)* „Ich glaube, es geht nicht."

Abschlussbedingung: „Man darf es nicht."

Die Frage nach Alternativen verleitete den Schüler zu idiosynkratischen Bezügen. Offenbar mag er lieber positive als negative Zahlen. Daher verschönerte er die Gleichung zu $13(x+9)=15$. Sicher fühlte er sich aber nicht und verwarf daher diese Strukturierung wieder.

Wichtig ist, dass Novize3 keinerlei Verbindung zur ersten Strukturierung herstellte. In diesem Sinne strukturierte er neu. Das war typisch für Strukturierungen der Kategorie 1. Sie hingen nie mit anderen produzierten Strukturierungen zusammen. Sie waren nicht als Eigenschaften eines Einzigen behandelt worden.

Novize3 strukturierte danach die Gleichung ein drittes Mal:

Anwendbarkeitsbedingung: Ich bin mir nicht sicher. „Sicher bin ich mir erst am Schluss, wenn es aufgeht."

Strukturierung: „Man könnte direkt die minus 15 *(zeigt von der 15 links des Gleichheitszeichens zur 15 auf der rechten Seite der Gleichung)* da machen."

Konsequenz: „Ich probiere es einmal" *(schreibt* $13(x-6)=0$, $13x-78=0$, $13x=78$ *und* $x=6$*)*.

Abschlussbedingung: „Ja, es geht auch [...] Man sieht, da *(zeigt auf die beiden 15 in der Gleichung)* kann [man] beides wegnehmen, dann hat man immer noch das Gleiche."

Auch das ist eine Strukturierung der Kategorie 2. Denn Novize3 strukturierte nicht um, sondern neu. Das wird nun begründet: Novize3 entdeckte eigentlich eine neue Art des Änderns: nicht zuerst ausmultiplizieren, sondern zuerst beidseitig minus 15 rechnen und dann ausmultiplizieren. Er behandelte diese Strukturierung vorerst unabhängig von den vorangegangenen Strukturierungen. Entsprechend war er gemäß obiger Anwendbarkeitsbedingung unsicher, ob die Umformung überhaupt korrekt sei. Allerdings gab er ein Kriterium für diese Korrektheit an. Nämlich, „wenn es aufgeht". Am Schluss stellte er dann fest, dass es „immer noch das Gleiche" gibt. Daraus schloss er dann: „Ja, es geht auch." Damit meinte er eigentlich mehr, als dass „es aufgeht". Er meinte wohl, dass beide Strukturierungen zum selben Resultat $x=6$ führten. Das war hier wohl der Grund, dass er die dritte Strukturierung schließlich akzeptierte. Genügt hätte aber vielleicht auch schon, wenn es „aufgegangen" wäre.

Novize3 rechtfertigte seine dritte Strukturierung also damit, dass sie auf das gleiche Ergebnis wie seine erste führte. Insofern hat er einen Zusammenhang zwischen den beiden Strukturierungen hergestellt. Doch das ist ein Zusammenhang zwischen den Konsequenzen der ersten und dritten Strukturierung und nicht der Strukturierungen selbst. Novize3 erkannte die Konsequenzen als dieselben. Aus diesem Grund wird in diesen Fällen von einer neuen Strukturierung und nicht von einer Umstrukturierung gesprochen. Daher gehören beide Strukturierungen zur Kategorie 2.

Die Strukturierungen der Experten

Die Experten nahmen nach der Bitte um einen alternativen Lösungsweg immer die Rolle einer Schülerin oder eines Schülers ein. Das formulierten sie auch explizit. Wichtig war, dass sie auch bei diesen zweiten Strukturierungen immer noch explorierend vorgingen. Sie mutmaßten, sprachen manchmal im Konjunktiv, verglichen mögliche Standardvorgehen mit ihrem ersten Vorgehen und erklärten Vor- und Nachteile der beiden Betrachtungsweisen. Aus diesem Grund wurden auch diese Strukturierungen der Kategorie 4 zugeordnet. Weil im Folgenden diese zweiten Strukturierungen der Experten keine Rolle mehr spielen, werden sie hier auch nicht weiter vorgestellt.

5.2.7 Ergänzungen bei den Kategorien

Die zweite Studie hat das in Kapitel 4 entwickelte Kategoriensystem im Wesentlichen bestätigt. Dieses Kategoriensystem war aufgrund von Interviews entstanden, wo die Novizen und Experten nicht explizit zu Alternativen aufgefordert wurden. In dieser zweiten Studie jedoch wurde eine solche Aufforderung konkret in den Interview-Leitfaden eingebaut. Die daraus sich ergebenden Strukturierungen erlauben es, die Kategorien – besonders die Kategorie 2 – leicht breiter zu konzipieren.

Die Bitte um alternative Lösungswege motivierte die Novizen und Experten zu anderen Strukturierungen und speziell die Novizen zu Entdeckungen. Die Frage, wie diese frisch produzierten Strukturierungen mit den schon hergestellten verbunden sind, wurde wichtig. Denn diese Verbindungen sind je nach Kategorie der Strukturierung anders. Tabelle 5.1 fasst die entsprechenden Unterschiede zusammen. Wenn eine Person gemäß der Kategorie 1 strukturiert, dann folgt sie typischerweise den algebraischen Regeln nicht. Vielmehr orientiert sie sich an optischen Merkmalen, welche für sie gerade wichtig sind. Solche optischen Merkmale sind in aller Regel unabhängig voneinander und erhalten ihre Rolle nahezu akzidentiell. Die Person versteht zwei Strukturie-

Tabelle 5.1: Ergänzungen der vier Kategorien von Prozessen des Strukturierens

Kategorie 1	**Kategorie 2**	**Kategorie 3**	**Kategorie 4**
Diese Strukturierungen sind nicht Strukturierungen desselben.	Diese Strukturierungen sind nicht Strukturierungen desselben. Allerdings können ihre Konsequenzen als dieselben erkannt werden.	Eine Umstrukturierung wird als Strukturierung desselben erkannt, etwa indem sie aus dieser hervorgeht.	Diese Strukturierungen sind Strukturierungen desselben, da sie als Eigenschaften eines Objekts behandelt werden.

rungen der Kategorie 1 daher als zwei völlig verschiedene Möglichkeiten, auf diesen Ausdruck zu reagieren. Die beiden Möglichkeiten haben für die Person nichts miteinander zu tun, außer dass sie Antworten auf die Begegnung mit dem Ausdruck sind.

Auch Strukturierungen der Kategorie 2 behandelt eine Person nicht als Strukturierungen desselben. Allerdings kann sie Konsequenzen aus den beiden Strukturierungen als gleiche oder zumindest als vergleichbare erkennen. Wie es in den Interviews sichtbar wurde, wenn jeweils eine Person die eine Konsequenz als die andere Konsequenz wiedererkannte, ist in Abschnitt 5.2.6 illustriert. Es kann etwa genügen, dass beide Strukturierungen zu Rechnungen führen, die „aufgehen". Oftmals wurde aber in den Interviews auch festgestellt, dass es das gleiche Resultat geben muss (wie in Abschnitt 5.2.6 dokumentiert). Sobald die zweite Strukturierung dasselbe Ergebnis wie die erste zur Folge hatte, akzeptierte die Person auch die zweite Strukturierung.

Stellte eine Person im Interview auf die Bitte um Alternativen eine Strukturierung der Kategorie 2 her, dann ist das hier als neue Strukturierung bezeichnet. Strukturierte die Person hingegen um, dann konnte sie eine direkte Verbindung zwischen der Umstrukturierung und der ersten Strukturierung herstellen. Zwei solcher Verbindungen sind in Abschnitt 5.2.4 gegeben. Sie zeigen, dass die Person mit der Umstrukturierung dasselbe wiedererkennt, was sie zuerst strukturiert hatte, nun einfach als etwas anderes.

Die Experten behandelten die Ausdrücke immer als Objekt. Die hergestellten Strukturierungen (der Kategorie 4) behandelten sie als Eigenschaften des Objekts. Für die Experten machten Strukturierungen einfach Aussagen über dasselbe, nämlich über das Objekt. Dieses verbindet die Strukturierungen. In diesem Sinne waren die Strukturierungen für die Experten immer miteinander verbunden.

5.3 Zusammenfassung der Resultate

Mit der zweiten Studie zum Strukturieren algebraischer Ausdrücke sollten Fragen untersucht werden, die nach der ersten Studie offen geblieben waren. Gefragt wurde danach, ob das Kategoriensystem unabhängig vom Design der Interviews ist, wie Ankerbeispiele von Strukturierungen linearer Gleichungen aussehen und welche Strukturierungen Novizen und Experten herstellen, wenn Sie um alternative Lösungswege gebeten werden. Entlang dieser drei Fragen werden die Resultate der zweiten Studie nun zusammengefasst.

1. Die vier Kategorien des Strukturierens sind unabhängig sowohl vom Typ der Terme und Gleichungen als auch von der Befragungsmethode (Abschnitt 5.2.1). Beispielsweise konnten alle identifizierten Strukturierungen linearer Gleichungen einer der vier Kategorien zugeordnet werden. Es ist aber denkbar, dass die Befragungsmethode einen Einfluss auf die Reichhaltigkeit und den Detailgrad der erhobenen Daten hat.

2. Die Strukturierungen der linearen Gleichungen spiegeln den unterschiedlichen Umgang mit Klammern (Abschnitte 5.2.2 bis 5.2.5). In der Kategorie 1 werden beispielsweise Teile so aufeinander bezogen, dass sie der Hierarchie der Operationen widersprechen. In der Kategorie 2 dominieren Strukturierungen, die dem Ausmultiplizieren dienen. Entsprechend werden Minuszeichen vor Produkten tendenziell als Vorzeichen behandelt. Das ändert sich in der Kategorie 3. Hier wird durch die Umstrukturierung oftmals das Minuszeichen als Operationszeichen erkannt. Das geht einher damit, dass die Multiplikation auch als Summand begriffen wird. Schließlich stellen die Strukturierungen der Kategorie 4 Eigenschaften der Ausdrücke dar, zum Beispiel die additiven respektive multiplikativen Aspekte eines Terms.

3. Werden Novizen und Experten zu einem zweiten Lösungsweg aufgefordert, strukturieren sie oftmals anders als beim ersten Lösungsweg (Abschnitte 5.2.6 und 5.2.7). Manchmal ist beobachtbar, wie Strukturierungen des gleichen Ausdrucks und derselben Kategorie behandelt werden: Strukturierungen der Kategorie 1 werden als unabhängig verstanden. Strukturierungen der Kategorie 2 werden zum Teil über ihre Konsequenzen miteinander verglichen. Strukturierungen der Kategorie 3 werden als Strukturierungen desselben erkannt und Strukturierungen der Kategorie 4 werden als Eigenschaften eines Objekts behandelt. Damit liegt ein weiteres Kriterium zur Umschreibung der vier Kategorien vor.

Klar wurde auch, dass die Begriffe Prozess, Verfahren und Objekt mit der Beschreibung des Prozesses des Strukturierens und den entsprechenden vier Kategorien zusammenhängen. Darauf wird im folgenden Kapitel näher eingegangen werden.

6 Weiterentwicklung der Theorie

In diesem Kapitel wird die Theorie weiterentwickelt, basierend auf den in Kapitel 4 und 5 dargestellten empirischen Resultaten. Ziel sind Hypothesen zur Entwicklung des Strukturierens.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist das Kategoriensystem der Prozesse des Strukturierens (Kapitel 4 und Kapitel 5). Dieses wird in den Abschnitten 6.1 und 6.2 vereinheitlichend rekapituliert und sowohl aus der Perspektive der theoretischen Überlegungen in Kapitel 2 als auch aus jener der mathematikdidaktischen Literatur beleuchtet. Basierend auf diesem Kategoriensystem wird anschließend ein Stufenmodell vorgeschlagen (Abschnitt 6.3). Dazu muss vorerst eine innere Verbindung zwischen den vier Kategorien hergestellt werden. Das gelingt, indem die vier Kategorien als Stufen des „Wissen, wie" gedeutet werden, das eine Person beim Folgen der impliziten Normen leitet. Das Stufenmodell ermöglicht eine Antwort darauf, inwiefern die vorgelegte Arbeit einen Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansatz stützt oder nicht.

6.1 Zusammenfassung der bisherigen Theorie und Empirie

6.1.1 Theorie

Die Leitfrage dieser Arbeit ist, wie Personen Umformungen in algebraischen Ausdrücken erkennen. Zur Behandlung dieser Fragestellung wurde der Begriff der Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks eingeführt. Er meint den Bezug zwischen Teilen eines Ausdrucks, der von der Person, die gerade strukturiert, hergestellt wird. Mit dem Begriff der Strukturierung steht nun ein Begriff zur Verfügung, der die Individualisierung der Struktur betont: Wo die Struktur als mathematische Eigenschaft eines algebraischen Ausdrucks verstanden wird, beschreibt die Strukturierung den individuellen Zugang der Person zum Ausdruck. So wird ein Begriff der mathematischen Theorie (nämlich die Struktur) ergänzt durch einen der individuellen mathematischen Praxis (nämlich die Strukturierung).

Die theoretischen Überlegungen dieser Arbeit folgen einer semiotisch-pragmatischen Sichtweise. Sie machen deutlich, dass die Festlegung des Strukturierens als das Aufeinanderbeziehen von Teilen des Ausdrucks es ermöglicht, das Strukturieren als ein Handeln zu begreifen. Die Konsequenz ist, dass erstens

Strukturieren der Beobachtung zugänglich wird und zweitens eine Person beim Strukturieren eines Ausdrucks diesem Bedeutung zuweist. Diese Bedeutung ist als eine personale (und pragmatische) konzipiert. Sie wird empirisch beschreibbar, indem man die Anwendbarkeitsbedingung, Strukturierung, Konsequenz und Abschlussbedingung bestimmt. Mit diesen vier Konstrukten wird erfasst, warum die Person den Ausdruck gerade so strukturiert. Damit einher geht die personale Bedeutung des Ausdrucks.

6.1.2 Empirie

In zwei Interviewstudien wurde untersucht, wie Experten und Novizen strukturieren. Das Hauptergebnis sind vier Kategorien von Prozessen des Strukturierens. Sie entsprechen vier Kategorien der Bedeutung von Strukturierungen.

Kategorie 1

Strukturierungen dieser Kategorie sind einerseits durch grafische Eigenschaften des Ausdrucks bestimmt und andererseits durch das, was eine Person, die gerade strukturiert, als ähnlich respektive gleich behandelt. Eine entsprechende Person bezieht jene Teile in einem Ausdruck aufeinander, die sie als optisch ähnlich oder gleich erachtet. Dabei hat sie das Ziel, den Ausdruck einfacher aussehen zu lassen. Das liefert oftmals idiosynkratische Strukturierungen, die zu falschen Umformungen führen. Denn die im Ausdruck vorkommenden Operationszeichen werden in diesen Fällen unangemessen mit den ähnlichen Teilen des Ausdrucks in Verbindung gebracht.

Eine Strukturierung der Kategorie 1 verbindet die Person, die gerade strukturiert, nicht mit anderen Strukturierungen desselben Ausdrucks, die sie herstellt. In diesem Sinne sind solche Strukturierungen nicht Strukturierungen desselben.

Kategorie 2

Solche Strukturierungen machen sichtbar, was es heißt, wenn eine Person einen Ausdruck als Befehl zur Ausführung eines Verfahrens begreift: Sie behandelt die Teile des Ausdrucks als Bestandteile des Verfahrens. Diese Teile bezieht sie so aufeinander, dass sie das Verfahren sofort ausführen kann. Alles andere beachtet sie nicht. So stellt sie keine Bezüge her, um etwas über den Termaufbau oder die Anwendung mathematischer Gesetzmäßigkeiten zu erfahren. Sie will einzig und allein den Ausdruck ändern.

Wenn die Person mehrere Strukturierungen dieser Kategorie beim selben Ausdruck produziert, dann vermag die Person diese nicht als Strukturierungen desselben zu behandeln. Hingegen erkennt sie allenfalls die Konsequenz der einen Strukturierung als jene der anderen Strukturierung.

An zwei wichtige und typische Beispiele sei erinnert:

1. Temporale Behandlung von „Punkt vor Strich“: Manche Novizen neigten dazu, aufgrund der Regel „Punkt vor Strich“ zuerst alles zu multiplizieren, bevor sie etwas anderes machten. Aus diesem Grund wagte es etwa Novize8 lange nicht, bei $13(x-6)+15 = 15$ beidseitig 15 zu subtrahieren, bevor sie $13(x-6)$ ausmultipliziert hatte (Abschnitt 5.2.3).

2. Operationszeichen als Vorzeichen behandeln: Manche Novizen neigten dazu, die Operationszeichen vor den Klammern als Vorzeichen zu behandeln. So behandelte Novize8 in $4(3x+9) = (7x-2)\cdot 18 - 18(7x-2)$ das Minuszeichen rechts in der Mitte anfänglich als Vorzeichen- und nicht als Operationszeichen (Abschnitt 5.2.4).

Kategorie 3

Strukturierungen dieser Kategorie sind Umstrukturierungen. Eine Person, die umstrukturiert, will den Term vereinfachen respektive die Gleichung lösen und nicht einfach ändern. Durch die Umstrukturierung generiert die Person ein Objekt, denn sie erkennt das wieder, was sie vorgängig schon einmal strukturiert hatte, aber anders: Sie verbindet die vorgängige Strukturierung mit der Umstrukturierung. Typischerweise bezieht die Person durch die Umstrukturierung die Teile des Ausdrucks so aufeinander, dass (vorher unbeachtete) mathematische Gesetzmäßigkeiten sichtbar werden.

Typisch sind die folgenden Beispiele: Novize2 strukturierte $40x^3$ und $60x^2$ in $40x^3 + 60x^2 = 12x + 18$ von zwei Summanden um in zwei Multiplikationen (Abschnitt 4.2.3). Novize8 behandelte das Minuszeichen in der Mitte der rechten Seite von $4(3x+9) = (7x-2)\cdot 18 - 18(7x-2)$ zuerst als Vorzeichen und erst dann als Operationszeichen. Sie strukturierte die rechte Seite um von zwei Multiplikationen zu Minuend minus Subtrahend (Abschnitt 5.2.4).

Kategorie 4

Alle Strukturierungen der Experten fallen in diese Kategorie. Der Experte behandelt den Ausdruck als Objekt mit verschiedenen Eigenschaften. Jede Strukturierung drückt eine andere Eigenschaft aus und insofern fungiert das Objekt als Verbindung zwischen den Strukturierungen. Der Experte nutzt solche Strukturierungen, um darüber entscheiden zu können, welche Eigenschaft (welche Umformung) aktuell zum Zuge kommen soll. Daher stellt er eine Vermutung über eine mögliche Umformung auf, strukturiert so, dass er die Angemessenheit dieser Umformung im konkreten Fall herausfinden kann, und verwirft oder akzeptiert anschließend seine Strukturierung. Insofern exploriert er mittels Strukturieren die Angemessenheit von Umformungen.

Diese Kategorien bringen zudem den Unterschied zwischen Experten und Novizen auf den Punkt. Die Strukturierungen der Novizen wurden fast ausnahmslos den Kategorien 1 bis 3 zugeordnet und jene der Experten der Kategorie 4. Die Strukturierungen der Experten dienen dem Aufstellen von Vermutungen, die dann widerlegt oder belegt werden. Die Experten strukturieren explorierend. Sie können spontan auf unterschiedliche Weisen strukturieren und brauchen nur noch zu testen, welche Strukturierung von all den möglichen Strukturierungen den einfachsten Lösungsweg liefert. Die Novizen hingegen verfügen nicht über einen solchen Überblick. Sie orientieren sich vorerst an Standardverfahren – oder gar an idiosynkratischen Herangehensweisen – und müssen alternative Lösungswege erst mal entdecken. Daher fokussieren sie entweder auf Teile, die optisch ähnlich aussehen, die Bestandteile von Verfahren sind oder die sie umstrukturieren und so neu als Objekte behandeln können.

Das zweite empirische Ergebnis ist der Nachweis, dass nicht nur Novizen, sondern selbst Experten individuell strukturieren. Auch wenn eine einheitliche Fachsprache verwendet wird und man etwa von Kürzen spricht, sind die damit bezeichneten Strukturierungen höchst unterschiedlich. Zudem strukturierten die untersuchten Experten die Terme und Gleichungen zum Teil wesentlich anders als in vielen Mathematik-Lehrbüchern vorgeschlagen (Abschnitt 4.2.7). Ein Beispiel ist der Term $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$. Hier nutzte die Mehrheit der Experten vertikale Bezüge.

6.2 Die Kategorien im Vergleich mit anderen Studien

In diesem Abschnitt werden die vier Kategorien in den Kontext der mathematikdidaktischen Diskussion gestellt. Dabei werden sowohl Literatur aus der Algebradidaktik referiert als auch gebietsübergreifende Arbeiten oder sogar Arbeiten aus anderen Bereichen der Mathematikdidaktik. Es kann belegt werden, dass die Kategorien relevante Aspekte des Umgangs mit dem algebraischen Kalkül einfangen. Deshalb sind in den folgenden Abschnitten 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 und 6.2.4 Resultate aus der mathematikdidaktischen Literatur zusammengestellt, welche wesentliche Aspekte der einzelnen Kategorien spiegeln. Zuerst wird aber dafür argumentiert, dass die Bildung von vier – statt beispielsweise drei oder fünf – Kategorien plausibel ist. Dazu werden Analogien gebildet zwischen dem hier vorgestellten Kategoriensystem und den Kategoriensystemen von Strukturierungsfähigkeiten der Kinder im Vorschulund Unterstufenbereich.

Kategorien von Strukturierungsfähigkeiten sind bislang nur für den Vorschul- und Unterstufenbereich entwickelt worden. Augenfällig ist, dass immer vier Kategorien gebildet wurden. Offenbar scheinen vier Kategorien empirisch gerade noch separierbar und für eine inhaltliche Trennung der Unterschiede gerade genügend differenziert zu sein. Zum Beispiel sind in Mulligan, Prescott und Mitchelmore (2004) vier Entwicklungsstufen der Muster- und Strukturerkennung von Kindern vorgestellt. Söbbeke (2005) postuliert vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit, die etwa beim Arbeiten mit dem Hunderter-Punktefeld relevant sind. Auch van Nes (2009) identifiziert vier Phasen in der Entwicklung der räumlichen Strukturierungsfähigkeit von Kindern.

Für einen ausführlicheren Vergleich dieser drei Kategoriensysteme sei auf Lüken (2012) verwiesen. Hier seien in aller Kürze nur die folgenden Gemeinsamkeiten festgehalten. In der jeweiligen ersten Kategorie dominieren idiosynkratische Sichtweisen, intendierte Strukturen bleiben unerkannt und die Kinder orientieren sich allgemein am konkret Fassbaren. In der jeweiligen zweiten Kategorie lösen sich die Kinder von dem konkret Vorgegebenen und beginnen Muster und Strukturen herzustellen. Van Nes (2009) betont beispielsweise, dass diese von den Kindern zwar in Teilen erkannt, aber nicht genutzt werden können. In der jeweiligen dritten Kategorie produzieren die Kinder intendierte Strukturierungen und können diese auch nutzen. Erste Umdeutungen sind möglich. In der jeweiligen vierten Kategorie meistern die Kinder die entsprechenden Aufgaben vollumfänglich. Sie strukturieren flexibel und sind sogar in der Lage, auch produktive, nicht intendierte Strukturierungen herzustellen, beispielsweise in ungeordneten Anordnungen.

Auch wenn diese drei Kategoriensysteme je andere Strukturierungsprozesse beschreiben, also nicht jene von algebraischen Ausdrücken, wird offensichtlich, dass jene vier Kategorien jeweils sehr analog zu den hier vorgestellten sind. Das Strukturieren, egal ob von visuellen Anordnungen, Punktefeldern, räumlichen Arrangements oder algebraischen Ausdrücken, scheint auf plausible Art und Weise in vier Stufen eingeteilt werden zu können. Es soll aber ausdrücklich betont werden, dass bei Begriffsbildungsprozessen nicht immer von vier Stufen gesprochen wird. Es gibt prominente Beispiele, wo nur drei Stufen postuliert sind. So teilt etwa Sfard (2008) die Entwicklung von Vorgehensweisen in Handlungsakte, Rituale und Explorationen ein (vgl. Abschnitt 2.5.4).

Nachdem das Kategoriensystem als Ganzes auf analoge Arbeiten in der Mathematikdidaktik bezogen wurde, stehen nun die einzelnen Kategorien im Fokus. Es werden Zusammenhänge zwischen jeder Kategorie und der mathematikdidaktischen Literatur aufgezeigt.

6.2.1 Kategorie 1: Den Ausdruck optisch einfacher machen

Strukturierungen dieser Kategorie basieren wesentlich auf grafischen Merkmalen des Ausdrucks. Typischerweise strukturieren wenig fortgeschrittene Schülerinnen und Schüler genau so. Im Paradigma des Vergleichs von Experten und Novizen entspricht dies dem Sachverhalt, dass sich Novizen vor allem an Oberflächenmerkmalen orientieren (Chi, Feltovich & Glaser, 1981; Martin, 2013; Rüede, 2009). Damit ist aber nicht gemeint, dass Experten solche Oberflächenmerkmale nicht registrieren. Sie nutzen diese durchaus für ihre Strukturierungen. Nur beziehen sie etwa gleiche Terme – zum Beispiel $(16 + 3x)$ in der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ – so aufeinander, dass sie als Folge korrekt und äußerst angemessen umformen. Leider ist der Einbezug von Oberflächenmerkmalen durch Experten wenig erforscht. Ein Beispiel aus der Mathematik ist etwa in Bromme, Rambow und Strässer (1996) diskutiert, eines aus der Medizin in Medin und Ross (1989).

Interessant ist, dass diese Oberflächenmerkmale vorwiegend zu solchen Fehlern Anlass geben, die dann zur Produktion „schöner" Resultate führen. In den hier vorgestellten zwei Studien konnte man nie beobachten, dass aufgrund von grafischen Auffälligkeiten eine Person (fälschlicherweise) ein „hässliches" Resultat erhielt. Meines Wissens ist dies auch in der Literatur nicht dokumentiert. Allerdings scheinen Oberflächenmerkmale teilweise zu kompliziert(er)en falschen Umformungen zu verführen. Zum Beispiel haben Linchevski und Livneh (2002) Personen Ausdrücke wie $217-17+69$, $217-32+26$ und $217-30+30$ vorgelegt. Sie stellten fest, dass bei $217 - 30 + 30$ einige Personen die beiden Teile -30 und $+30$ nicht einfach miteinander zu Null verrechneten, sondern zu 60 addierten und von 217 subtrahierten. Bei $217-17+69$ trat dieser Fehler nahezu nie auf. Diese Studie dokumentiert als eine der wenigen, dass man durch geschicktes Wählen der Zahlen die Probanden zu komplizierteren Rechnungen verführen kann. Die große Mehrheit der Studien hält aber die Neigung von Novizen fest, syntaktische Auffälligkeiten zu fehlerhaften Streichungen und Verrechnungen zu missbrauchen. So weisen beispielsweise Kirshner und Awtry (2004) gerade darauf hin, dass aufgrund der visuellen Augenscheinlichkeit von Regeln wie etwa $(xy)^z = x^z y^z$ die Schülerinnen und Schüler zur Herstellung unangemessener, visueller Augenscheinlichkeiten verführt werden. Sie vereinfachen dann etwa $(x + y)^4$ zu $x^4 + y^4$. Im Abschnitt 1.2.3 ist darauf hingewiesen, dass zum Beispiel in Matz (1982) oder Malle (1993) solche Fehler als Übergeneralisierung oder unzulässige Linearisierung erklärt werden. Bei Kirshner und Awtry (2004) handelt es sich hingegen klar um Probleme der Wahrnehmung, ein Erklärungsansatz, der als kognitionspsychologische Lesart der Kategorie 1 aufgefasst werden kann.

Offenbar scheinen solche Verführungen durch grafische Auffälligkeiten besonders bei den letzten Schritten während des Umformens aufzutreten, also dann, wenn sich das Schlussresultat abzeichnet. So berichtet Hall (2002) über Personen, die beispielsweise $\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8}$ korrekt zu $\frac{x+5}{x+4}$ umformten, dies dann aber unzulässig zu $\frac{5}{4}$ zusammenstrichen. Hall (2002) hebt die Individualität der Gründe hervor, welche seine untersuchten Personen für das Wegstreichen der x in $\frac{x+5}{x+4}$ anführten. Gemeinsam war diesen Personen hingegen, dass sie das x^2 in $\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-8}$ als Befehl zum Faktorisieren behandelten und dann im resultierenden Ausdruck $\frac{(x+5)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$ das Gleiche, also $(x-2)$, wegstrichen. Ebenso strichen sie dann in $\frac{x+5}{x+4}$ das Gleiche, nämlich das x, weg. Dahinter liegen offenbar Strukturierungen der Kategorie 1. Allerdings wird offen gelassen, inwiefern bei der Umformung zu $\frac{5}{4}$ auch jenes (allenfalls aus der Arithmetik mitgenommene) Bedürfnis eine Rolle gespielt haben könnte, im Resultat keine sichtbaren Operationszeichen mehr zu haben, also einen Ausdruck wie $5x$ oder ab. Denn Schülerinnen und Schüler neigen dazu, beispielsweise $5+x$ zu $5x$ zu vereinfachen (Falle, 2007; Tirosh, Even & Robinson, 1998). Gemäß Hall (2002) wären weitere Untersuchungen nötig, um Klarheit zu bekommen, inwiefern bei seinen Untersuchungen genau solche Bedürfnisse eine Rolle spielten.

6.2.2 Kategorie 2: Den Ausdruck ändern

Strukturierungen der Kategorie 2 sind mit der Behandlung eines Terms als Verfahren verbunden. Der algebraische Ausdruck wird als Befehl für ein Verfahren behandelt. Entsprechend suchen die Personen im Ausdruck nur nach dem, was sie zur Ausführung des ersten Verfahrensschritts benötigen. Das ist in der Literatur auch dokumentiert. Zum Beispiel berichtet Falle (2007, S. 291) über Schülerinnen und Schüler, die das Vereinfachen eines Terms wie $8p-2(p+5)$ behandeln als „die Klammern loswerden“ oder „Man rechnet das Äußere mal das Innere“. Entsprechend beschreiben sie verbal nur den Prozess des Ausmultiplizierens, nicht aber das Resultat.

Diese Einschränkung auf das Verfahren wurde und wird in der Literatur vielfach thematisiert. Beispielsweise halten Graham und Thomas (2000, S. 268) fest: “Students have often been taught the rules of algebra so that they could develop the necessary manipulative ability, but with little addressing of concepts.” Aufgrund dieser Feststellung schlagen diese Autoren die Förderung des *versatilen Denkens* (versatil thinking) vor. Denn so würden Lernende mit einem algebraischen Ausdruck nicht nur ein entsprechendes Verfahren verbinden, sondern auch Gesetze und Eigenschaften und wären dann in der Lage, auch andere, nicht standardmäßige Umformungen zu diskutieren.

Zentral an einer Strukturierung dieser Kategorie ist ihre Abschlussbedingung. Sie besteht nur darin, dass die sich aus der Strukturierung ergebende Konsequenz ausgeführt werden konnte. Typischerweise heißt das, dass der

Term oder die Gleichung umgeformt werden konnte, und zwar so, wie die Person es beabsichtigte. Die Person prüft nicht, ob die Aufgabe nun gelöst ist. Das führt vor allem in unvertrauten Situationen zu Problemen. Die Person strukturiert dann so, wie sie es gewohnt ist, und realisiert gar nicht, dass die resultierenden Umformungen nicht zum Ziel führen respektive unangemessen sind. Als Folge meistert die Person die unvertraute Situation nicht, da sie darauf nur Standardverfahren anwendet. Das konstatieren beispielsweise Sfard und Linchevski (1994) sowie Huntley et al. (2007). Letztere etwa legten Probanden lineare Gleichungen vor. Die Probanden lösten diese erfolgreich, aber nur dann, wenn die Gleichung genau eine Lösung besaß, das heißt, wenn der Normalfall vorlag. Bei Gleichungen mit „unendlich“ vielen Lösungen wie $2(3x + 4) = 6x + 8$ oder ohne Lösungen wie $6x + 13 = 6x$ scheiterten die Probanden oft, denn sie behandelten auch diese Gleichungen so, wie wenn sie genau eine Lösung hätten.

Offenbar kann sich eine Person, die vorwiegend Strukturierungen der Kategorie 2 produziert, schwerlich selbst helfen, wenn ihr eine neue Situation vorgesetzt wird. Das arbeitet Skemp (1978) als Charakteristikum des *instrumentellen Verstehens* (instrumental understanding) heraus. Gemäß diesem Autor arbeiten Personen, die instrumentell denken, einen Ausdruck einfach Schritt um Schritt ab: “What has to be done next is determined purely by the local situation.” Wer instrumentell denkt, weiß über die einzelnen Verfahrensschritte Bescheid, auch über deren Reihenfolge, behandelt sie aber als reine Anweisung. Ausgebildet ist nur das Wie des Verfahrens, das Wann fehlt.

Völlig konsistent mit diesen Feststellungen ist die Tatsache, dass eine Person zwischen zwei Strukturierungen der Kategorie 2 keine Verbindung herstellt, auch dann nicht, wenn sie denselben Ausdruck einmal so und einmal anders strukturiert hatte. Insbesondere begreift sie dies nicht als Umstrukturierung. Die Person behandelt die beiden Strukturierungen einfach als zwei verschiedene Aufgaben. Analog berichtet Mok (2010) über Schülerinnen und Schüler, die sowohl $(a + b) : c = a : c + b : c$ als auch $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ als korrekte Umformung behandelten, doch ihre Begründungen nicht miteinander in Verbindung brachten, auch in jenen Fällen nicht, wo sie selbst die Bruchdarstellung ausgehend von $(a + b) : c = a : c + b : c$ notiert hatten.

Aufgrund der hohen Anzahl der hergestellten Strukturierungen der zweiten Kategorie wird in den folgenden Abschnitten ein Punkt wichtig, der in Abschnitt 2.5 ausführlich vorgestellt wurde. Terme können als Prozess, Verfahren oder Objekt behandelt werden. Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze postulieren eine Entwicklung von der Behandlung eines Terms als Prozess hin zu seiner Behandlung als Objekt. Diese Ansätze gehen aber auf die Behandlung eines Terms als Verfahren gar nicht ein. Die in der Kategorie 2 verorteten Strukturierungen entsprechen jedoch einer Behandlung des Terms als Verfahren. Die Mehrheit der von den Novizen hergestellen Strukturierungen war von dieser

Art, wie zum Beispiel Abbildung 5.1 belegt. Die Novizen behandelten die Ausdrücke oft als Verfahren, aber selten als Prozess. Es scheint, dass die befragten Personen nicht Prozesse verinnerlichten, sondern Verfahren verkörperlichten. Das deutet darauf hin, dass Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze zu ergänzen respektive zu revidieren sind, was in Abschnitt 6.3.5 auch gemacht werden wird. Insgesamt bestätigen also die Studien von Kapitel 4 und 5 die Resultate von Nogueira de Lima und Tall (2008, S. 14):

> “The students in this study do not build on algebraic expressions as processes [...] the students focus not on the general principle but on the specific principles that they use in practice, such as ‚picking up a term‘ and ‘shifting it to the other side’.”

6.2.3 Kategorie 3: Den Ausdruck umstrukturieren

Diese Kategorie steht für den Übergang vom Novizen- zum Expertentum. Die Strukturierungen dokumentieren Bezüge, mit denen aus einer ersten Strukturierung eines Terms eine zweite produziert wird. Dasselbe wird auf zweierlei Arten strukturiert. Ein neues Objekt ist generiert (vgl. Abschnitt 2.5.3). Die Voraussetzung für solche Umstrukturierungen war jeweils, dass die entsprechende Person die Aufgaben lösen und nicht nur das Verfahren ausführen wollte. Das Wann der Strukturierung war offenbar ebenso wichtig wie das Wie. Die entsprechenden Personen wiesen einem Verfahren einen Zweck zu: Wozu brauche ich das Verfahren? Was ist das Ziel der Anwendung? Im Sinne von Nesher (1986) zeigten sie ein Verstehen des Verfahrens. Denn diese Autorin betont, dass mit dem Verstehen eines Verfahrens immer die Fähigkeit seiner Beurteilung einhergeht. Das ist genau der Unterschied zur Kategorie 2: Die Verfahren werden dort nur ausgeführt. Erst wenn man ein Verfahren hinsichtlich der Erfüllung seines Zwecks beurteilen kann, verwirft man es bei Nichteignung und strukturiert den Ausdruck aus eigenem Antrieb um. Insofern setzt der Drang zur Umstrukturierung metakognitive Fähigkeiten voraus.

Eindrücklich an den Strukturierungen der Kategorie 3 war, wie hier die Novizen handelnd entdeckten. Eine Strukturierung aufgrund ihrer Unangemessenheit zu verwerfen ist das eine. Das andere ist, trotzdem handlungsfähig zu bleiben. Mason und Spence (1999, S. 136) sprechen von *Wissen zu* (knowing-to), welches Personen zu Entdeckungen befähigt: “Knowing-to act, in the moment, [...] is what students need in order to engage in problem solving where context is novel and resolution non-routine or multi-layered.” Oftmals schauten die Novizen erst nach dem Verwerfen einer verfahrenbasierten Strukturierung den algebraischen Ausdruck genauer an. Sie begannen, die Teile so aufeinander zu beziehen, dass ihre Gemeinsamkeiten sichtbar und die Anwendung von Rechengesetzen erkennbar wurden. Sie probierten aus, sie wollten einfach anders strukturieren, als das Verfahren vorschlägt. Sie zeigten ein so genanntes *suchbasiertes* (search-based) Handeln (Gick, 1986). Die Experten gingen in diesen Situationen hingegen *Schema-orientiert* (schema driven) vor. Sie strukturierten, um aus ihrem Repertoire möglicher Verfahrensideen die optimale auszuwählen.

Ganz allgemein wird die zentrale Bedeutung von Umstrukturierungsprozessen beim Lernen von Mathematik gerade bei semiotischen Ansätzen betont. Zum Beispiel plädiert Brunner (2011) für eine Konzeption des mathematischen Lernens als Restrukturierungsprozess und Hoffmann (2005) versteht Verallgemeinerungsprozesse als Restrukturierungen.

6.2.4 Kategorie 4: Klassifizierungen des Ausdrucks erforschen

Die Strukturierungen der Kategorie 4 sind Bestandteile des explorierenden Vorgehens der Experten. Diese vermuteten erstens ein mögliches Vorgehen entweder aufgrund eines Merkmals oder aufgrund von verworfenen Strukturierungen. Zweitens suchten sie nach Belegen für ihre Vermutung und stellten dazu entsprechende Strukturierungen her. Dieses Erforschen des Ausdrucks konnten die Experten verbalisieren. Sie diskutierten den Ausdruck, sie erzählten eine Geschichte über ihn, im Sinne von Sfard (2008) produzierten sie Narrationen. Zentrales Thema solcher Diskussionen war typischerweise die Angemessenheit der einzelnen Umformungen. Sie verglichen ihren Lösungsweg mit anderen möglichen, insofern offenbarten sie eine hohe Flexibilität, wie etwa in Star und Newton (2009) beschrieben.

Die Flexibilität von Experten wird in der Literatur oftmals als *Adaptivität* bezeichnet (Schwartz, Bransford & Sears, 2005). Adaptive Experten können mehr als (nur) routinierte Experten. Sie können nämlich auch die Perspektive wechseln und so neuartiges Wissen erschließen. Die in der hier vorgelegten Arbeit von den Experten hergestellten Strukturierungen können als solche Schöpfungsakte verstanden werden. Denn diese Strukturierungen basierten auf einem Wechsel der Perspektive, auf einem expliziten Verzicht auf Standardvorgehen. Das in Abschnitt 5.2.5 von Experte4 angeführte Zitat von Nietzsche „Das erste Zeichen der Geistigkeit ist, auf einen Reiz nicht sofort zu reagieren" drückt diese Adaptivität aus.

Eine zentrale Frage in der Expertise-Forschung ist, welche Faktoren das Konstrukt der Flexibilität bestimmen. Verschaffel et al. (2011) listen drei Faktoren auf: Charakteristik der Fragestellung, des Experten und des Kontexts. Was als flexibles Strukturieren gilt, ist somit nicht allein durch Merkmale des algebraischen Ausdrucks bestimmt, sondern etwa auch durch die bevorzugten Vorgehensweisen des Experten und die impliziten Normen der Mathematik.

Vor diesem Hintergrund überrascht die Vielfalt der Strukturierungen bei den Experten nicht. Im Gegenteil. Die beispielsweise in Abschnitt 4.2.7 dokumentierten zwölf Strukturierungen der zwölf Experten bestätigen, dass flexibles Strukturieren wesentlich durch personale Eigenschaften und (implizit) durch soziale Normen bestimmt sind. Ansonsten hätten die zwölf Experten identisch strukturieren müssen.

6.3 Ein vierstufiges Modell des Strukturierens

In diesem Abschnitt wird ein Stufenmodell des Strukturierens algebraischer Ausdrücke vorgestellt. Es wird auf eine breite Verankerung des vierstufigen Modells geachtet. So werden zu seiner Begründung sowohl empirische Resultate als auch theoretische Überlegungen herangezogen. Gestützt wird es auf die in Abschnitt 4.2.5 dargestellten empirisch fundierten Kategorien von Strukturierungen, auf die in Abschnitt 5.2.7 festgehaltenen Ergänzungen dieser Kategorien, auf die Konzeption von Stufenmodellen des Erkennens von Strukturen und Mustern (Lüken, 2012; Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004; van Nes, 2009; Söbbeke, 2005), auf Arbeiten zur Behandlung von Termen als Prozesse und Objekte (Abschnitt 2.5) und auf Arbeiten zur Generierung von Objekten wie Brandom (2000) und Sfard (2008).

6.3.1 Implizites Wissen und Wahrnehmung

In den folgenden Abschnitten wird die bestimmende Rolle des „Wissen, wie“ respektive des impliziten Wissens beim Strukturieren herausgearbeitet. Aus diesem Grund wird nun detaillierter ausgeführt, was in dieser Arbeit unter dem „Wissen, wie“ respektive dem impliziten Wissen verstanden wird und wie dies allgemein mit Wahrnehmungsprozessen zusammenhängt. Zentral ist die Arbeit von Brandom (2000).

In den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 ist das mathematische Arbeiten als Befolgen von impliziten Normen beschrieben. Beispielsweise ist die Angemessenheit der Regelanwendung durch implizite Normen festgelegt. Diese Normen sind implizit, weil sie im mathematischen Handeln fundiert sind. Wer ihnen folgen kann, besitzt das entsprechende *praktische* Wissen. Das ist ein „Wissen, wie“ und „Wissen-wie heißt nichts anderes als verlässlich fähig sein“ (Brandom, 2000, S. 62). Es ist also ein praktisches Wissen und besteht sowohl in selbst eingegangenen als auch in von anderen zugewiesenen Festlegungen. Das „Wissen, wie“ ist somit nicht etwas Kognitives im Sinne der Kognitionspsychologie, sondern etwas Normatives im Sinne von implizit normativen Praktiken.

Das „Wissen, wie“ leitet also das Handeln, beispielsweise das mathematische Arbeiten, insbesondere das algebraische Strukturieren. Nun lässt sich grundsätzlich jedes Handeln als Sequenz einzelner Handlungen auffassen. Dann werden die Relationen zwischen den einzelnen Handlungen wichtig. So stellt sich die Frage, welche Umstände zu welchen Konsequenzen führen (sollen) und welche weiteren Konsequenzen sich daraus wiederum ergeben etc. Um diese Frage beantworten zu können, ist die Unterscheidung von drei Fällen hilfreich (Brandom, 2000):

1. Wenn sowohl der Umstand als auch die Konsequenz je ein Aussagesatz ist, dann spricht man von einer Inferenz (vgl. Abschnitt 2.3.2). Solche Inferenzen sind besonders für die Bedeutung eines Begriffs wichtig. Denn diese besteht aus den angemessenen Inferenzen, in die der Begriff involviert ist.

2. Wenn der Umstand von perzeptiver Natur und die Konsequenz ein Aussagesatz ist, dann handelt es sich um eine explizit gemachte Wahrnehmung. Brandom (2000) spricht dann von einer „Beobachtung“ respektive von einem „nicht-inferentiellen Bericht“. Solche Beobachtungen sind also nicht das Resultat einer Schlussfolgerung (einer Inferenz), sondern sie sind eine Reaktion auf die perzeptiven Umstände. Nicht-inferentielle Berichte sind bei Brandom das Resultat von *verlässlich unterscheidenden Reaktionsdispositionen*.

3. Wenn der Umstand ein Aussagesatz und die Konsequenz eine praktische Tätigkeit ist, dann entspricht dies einer intentionalen Handlung.

Weil später die Konzeption der Wahrnehmung im Zentrum steht, wird im Folgenden auf die ersten beiden Fälle fokussiert. Es muss aber betont werden, dass beim Strukturieren von algebraischen Ausdrücken auch der dritte Fall wesentlich ist. So wird etwa im Abschnitt 7.3 deutlich werden, dass (intentionale) Handlungen wie das Anfärben von Teilen eines Ausdrucks, das Zeichnen von Pfeilen oder das Notieren unnötiger Klammern produktive Tätigkeiten sind, die das Strukturieren sowohl sichtbar machen als auch unterstützen.

Die obige Unterscheidung in drei Fälle kann auch anders gelesen werden: Es gibt zwei Möglichkeiten, die auf einen Aussagesatz führen. Entweder erschließt man diesen inferentiell aus vorhergehenden Behauptungen oder man nimmt etwas wahr – was eben einer nicht-inferentiellen Produktion entspricht – und macht es explizit. Den inferentiellen Anteil des „Wissen, wie“, also die inferentiellen Relationen, bezeichnet Brandom (2000) als *implizites Wissen*. Dieses implizite Wissen ist besonders gegliedert, da es nur aus Inferenzen besteht. Das implizite Wissen eines Begriffs etwa kann zumindest zum Teil explizit gemacht werden, und zwar als (endliche!) Menge von Konditionalen: $\text{Umstand}_i \Longrightarrow \text{Konsequenz}_i$, wobei im Umstand_i oder in der Konsequenz_i

der entsprechende Begriff vorkommen muss. Dabei liegen Umstände wie auch Konsequenzen als Aussagesätze vor.

Obwohl das implizite Wissen ausschließlich inferentiell gegliedert ist, spielt es beim (nicht-inferentiellen) Prozess des Wahrnehmens eine entscheidende Rolle. Denn Beobachtungen können als nicht-inferentielle Berichte explizit gemacht werden. Insofern gehen in Beobachtungen Begriffe ein. Und mit diesen Begriffen ist das entsprechende implizite Wissen verbunden. Es ist schon vor dem Wahrnehmungsprozess vorhanden und kann daher die Wahrnehmung entsprechend leiten. Umgekehrt wird dieses implizite Wissen durch die Wahrnehmung, insbesondere durch deren Konsequenzen, geformt. Dieses Wechselspiel zwischen Wahrnehmung und implizitem Wissen (und damit der impliziten sozialen Praxis) erachtet auch Radford (2010a) als zentral. Er betont, dass unsere Wahrnehmung von Dingen wesentlich davon abhängt, in welchen Kontexten man diese Dinge kennengelernt und wie man mit ihnen umzugehen gelernt hat. Zum Beispiel ist es wichtig, wie man gelernt hat, wahrzunehmende Dinge zu beschreiben. Das entsprechende implizite Wissen leitet den Wahrnehmungsprozess, Radford (2010a, S. 2) spricht von einem „eye as a theoretician".

Zur Illustration stellen wir uns eine Person vor, welche die Gleichung $7(16+3x) = 100 - 3(16+3x)$ anschaut und festhält: „Das ist eine lineare Gleichung." Mit diesem Aussagesatz ist die Wahrnehmung zumindest zum Teil explizit gemacht. Über welches implizite Wissen die Person verfügt, wird aber deutlicher, wenn sie weitere Beobachtungen explizit macht. Wenn sie über eine hohe Expertise verfügt, könnte sie beispielsweise feststellen, dass sie links einen Block sieht und rechts 100 minus einen anderen Block, wobei in beiden Blöcken die gleiche Klammer vorkommt. Dieser nicht-inferentielle Bericht setzt ein implizites Wissen voraus, das als Inferenz vom Aussagesatz „Das ist eine lineare Gleichung" zum nicht-inferentiellen Bericht über die Blöcke explizit gemacht werden kann. Denn obige Person impliziert mit der Aussage „Das ist eine lineare Gleichung" eine Aufteilung der beiden Seiten links und rechts des Gleichheitszeichens in Summen respektive Differenzen. Im Detail: Sie impliziert, dass $100 - 3(16+3x)$ als Differenz von 100 und $3(16+3x)$ zu behandeln ist und nicht als Multiplikation von -3 und $(16+3x)$, deren Resultat dann mit 100 zu verrechnen ist. Da sie über das entsprechende implizite Wissen verfügt, nimmt sie das Minuszeichen als Operations- und nicht als Vorzeichen wahr. Sie sieht es so, wie sie es im Folgenden behandelt hätte.

Dieses Beispiel zeigt erstens, wie die inferentielle Gliederung des impliziten Wissens einer Person auf ihre Wahrnehmung wirkt. Sie sieht das, was sie implizit weiß. Mit „Das ist eine lineare Gleichung" und den anschließenden nicht-inferentiellen Berichten macht sie zweitens diese inferentielle Gliederung zumindest teilweise explizit und somit drittens auch die personale Bedeutung von „Das ist eine lineare Gleichung". Durch weiteres Nachfragen bei der Person könnten immer mehr Aspekte ihres impliziten Wissens explizit gemacht werden. Umgekehrt lernt die Person. Ihre Erfahrungen mit ihren Wahrnehmungen formen ihr implizites Wissen.

Zusammenfassend: Das implizite Wissen ist der inferentielle Anteil des „Wissen, wie“. Die Wahrnehmung eines algebraischen Ausdrucks ist eine (nicht-inferentielle) Beobachtung. Dabei spielt das implizite Wissen eine entscheidende Rolle. Denn in seine inferentielle Gliederung sind Begriffe eingebunden, die Bestandteil des nicht-inferentiellen Berichts sind. Daher weist die inferentielle Gliederung die Person einerseits darauf hin, wie der Ausdruck angeschaut werden könnte. Andererseits kann die aktuelle Wahrnehmung zu neuen Erkenntnissen und damit zu einem Aus- oder Umbau der inferentiellen Gliederung Anlass geben.

Diese Konzeption des Wechselspiels zwischen implizitem Wissen und Wahrnehmung ist das Korrelat zur kognitionspsychologischen Vorstellung des Wahrnehmungsprozesses wie etwa in Guski (2001) vorgestellt oder wie in Bromme (1992) und Harnad (1987) als kategoriale Wahrnehmung beschrieben. Auch wenn solche Analogien nur bis zu einem bestimmten Grad sinnvoll sind, könnte in diesem Fall eine Analogie wie folgt lauten: Das Vorwissen korrespondiert zum impliziten Wissen. Und so wie das Vorwissen mit dem wahrzunehmenden Objekt wechselwirkt, wechselwirkt dieses mit dem impliziten Wissen.

6.3.2 Wiedererkennen als Übersetzen zwischen Strukturierungen

Nebst der Rolle des impliziten Wissens wird im Folgenden auch die Behandlung eines algebraischen Ausdrucks als Objekt wichtig werden für die Modellierung des Strukturierens. Damit werden die Überlegungen aus Abschnitt 2.5.3 weitergeführt. In jenem Abschnitt wurde die Behandlung eines Terms als Objekt mit Aspekten seiner Umformungen in Verbindung gebracht. Nun wird ein Zusammenhang zwischen der Behandlung eines Terms als Objekt und den Strukturierungen eines Terms hergestellt.

Brandom (2000) zufolge schafft das Wiedererkennen Identität. Dabei ist Wiedererkennen immer ein Wiedererkennen des einen als das andere, es ist ein Erkennen desselben auf zweierlei Arten. Brandom arbeitete diesen Gedanken weiter aus. Das eine als das andere wiederzuerkennen machte er als *Substitution* des einen durch das andere explizit. Das Substituieren macht also explizit, was man mit der (impliziten) Handlung der Wiedererkennung vollzieht. Dabei muss man sich immer im Klaren sein, dass Substituieren eine Inferenz ist: Vom unsubstituierten Satz (der die eine Weise beschreibt) zum substituierten Satz (der die andere Weise beschreibt).

Brandom nutzt die Idee der Substitution zur Definition von Gegenständen.

Bei ihm geben singuläre Termini, die untereinander in Aussagen so hin- und hersubstituiert werden können, dass sich die Bedeutung der Aussage nicht ändert, zu Gegenständen Anlass, auf welche diese singulären Termini hinweisen. Leicht vereinfacht gesagt, entspricht bei Brandom ein Gegenstand einer Äquivalenzklasse von singulären Termini, die in Aussagen untereinander so substituiert werden können wie gerade beschrieben. Damit erreicht Brandom, dass singuläre Termini wie üblich sprachliche Ausdrücke sind, die Gegenstände bezeichnen. Diese miteinander substituierbaren singulären Termini fungieren bei Brandom als verschiedene Weisen, wie auf den Gegenstand Bezug genommen werden kann. Verwendet man den einen singulären Term, nimmt man so Bezug, verwendet man einen anderen, nimmt man anders Bezug. Der eine singuläre Term macht die eine Eigenschaft des Gegenstands explizit, der andere die andere.

Obiger Gedanke wird nun zur Präzisierung dessen verwendet, was mit der Behandlung eines algebraischen Ausdrucks als Objekt gemeint sein kann. Ein erster Zugang findet sich in Abschnitt 2.5.3. Dieser wird nun verfeinert durch Einbezug des Strukturierens: Wenn eine Person einen algebraischen Ausdruck als Objekt behandelt, dann bedeutet das, dass sie ihn unterschiedlich strukturieren und die einzelnen Strukturierungen (nicht unbedingt explizit) ineinander übersetzen kann. Wenn man die Idee von Brandom zu Ende denken wollte, dann wäre ein algebraischer Ausdruck als Objekt folgendermaßen definiert: Er wäre gleich der Äquivalenzklasse von Strukturierungen, die die Person ineinander übersetzen kann. Einmal so und dann anders strukturieren kann sogar als Substitution der einen Strukturierung durch die andere explizit gemacht werden. Wiedererkennen ist genau das Übersetzen der einen Strukturierung in die andere, das heißt, das eine im anderen wiedererkennen.

Es wurde festgehalten, dass Brandom das Wiedererkennen des einen als das andere als Substitution formalisiert hat. In der Mathematik werden solche Substitutionen durch das Gleichheitszeichen explizit gemacht. $a = b$ meint die wechselseitige Substituierbarkeit von a und b. In der Tat ist diese Substituierbarkeit ein wesentliches Kriterium dafür, wann man von einer relationalen Behandlung von $a = b$ sprechen kann. Experten haben damit keine Mühe. In Jones (2009) sowie Jones und Pratt (2012) ist allerdings belegt, dass Kinder diesen relationalen Aspekt des Gleichheitszeichens lernen müssen. Sie müssen beispielsweise lernen, dass aus $11 = 3 + 8$ und $11 + 22 = 33$ die Aussage $3 + 8 + 22 = 33$ folgt. Dahinter steckt eine Substitution, womit offenbar viele Kinder Schwierigkeiten haben.

Ein Beispiel

Obige Idee, dass das Wiedererkennen gleich dem Übersetzen der einen Strukturierung in die andere ist, wird nun an einem Beispiel illustriert. Gewählt wird eine Umstrukturierung: Eine Person produziert aus der ersten Strukturierung eine zweite, die erste Strukturierung wird in die zweite übersetzt. So erkennt die Person die zweite Strukturierung als Strukturierung dessen, was sie zuerst strukturiert hatte. Die erste und zweite Strukturierung werden zu Strukturierungen desselben, nämlich des strukturierten Terms. Dieser wird durch die Umstrukturierung als Objekt behandelbar. Es wird ein neues Objekt erfunden respektive entdeckt. Das führt dazu, den umstrukturierten Term als Teil(-Objekt) des Ausdrucks zu behandeln und nicht etwa (bloß) als Bestandteil eines Verfahrens.

Das Beispiel besteht in den folgenden redigierten und geordneten Interviewpassagen von Novize2, die gerade die Gleichung $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$ strukturierte (Rüede, 2012c).

Anwendbarkeitsbedingung: „Dann habe ich geschaut, ob man es anders machen kann. [...] Ich habe auch die 4 wieder raufgenommen zum x [...] und dann gesehen, dass sie gleich sind.“

Strukturierung: $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auf der linken und $\frac{4x}{x-4}$ auf der rechten Seite sind gleich.

Konsequenz: Dann ist auf der linken Seite „eine Addition entstanden [...] und hier [auf der rechten Seite] wäre es wie auch 0+ und dann könnte man es auf beiden Seiten wegrechnen.“

Abschlussbedingung: „Dann konnte man bequem mit dem Nenner multiplizieren und es blieb einfach noch $x(1-x) = 0$.“

Durch diese Umstrukturierung übersetzte Novize2 mehrere Strukturierungen ineinander. In gewissem Sinne arbeitete sich Novize2 „von innen nach außen“. Damit ist Folgendes gemeint: Novize2 behandelte den Term $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ zuerst als Multiplikation. Das „Innere“ des Terms, also seine Oberflächenstruktur, war wichtig. Novize2 überlegte sich, wie sie diese Multiplikation ausführen könnte. Das war die erste Strukturierung. Danach entdeckte sie die Gleichheit der beiden Terme links und rechts des Gleichheitszeichens. Sie bezog diese beiden Brüche aufeinander. Das war die zweite und die eigentliche Strukturierung. Dank diesem Vergleich konnte sie die Multiplikation als Produkt behandeln, das heißt, $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auch von „außen“ anschauen: Sie schaute, was auf dieses Produkt wirkt. Dadurch erkannte sie, dass $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auch ein Summand ist. Das ist die dritte Strukturierung und in obiger Konsequenz formuliert. Novize2 interpretierte also den Term $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ zuerst gemäß seinem inneren Aufbau und erst danach gemäß seinen äußeren Zusammenhängen mit den restlichen Teilen der Gleichung. Wichtig dabei ist, dass diese Handlung die erste in die dritte

Strukturierung übersetzt, das explizite Verbindungsglied ist die zweite, also die eigentliche Strukturierung.

Dieses Übersetzen führte zum Wiedererkennen. Die erste Strukturierung ging mit dem Wegmultiplizieren der Nenner einher, die dritte mit dem Wegstreichen der beiden Brüche links und rechts des Gleichheitszeichens. Weil die beiden Strukturierungen ineinander übersetzbar geworden sind, werden sie aber nicht mehr einfach den zugehörigen Verfahren zugewiesen und als unverbunden behandelt. Es sind auch nicht mehr zwei unverbundene Aufgaben, einmal das Wegmultiplizieren der Nenner, einmal das Wegstreichen von $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ und $\frac{4x}{x-4}$. Vielmehr erkannte Novize2, dass die Multiplikation $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ auch ein Summand ist. Sie behandelte dasselbe unterschiedlich. Novize2 erkannte den Bestandteil des einen Verfahrens wieder und zwar als Bestandteil des zweiten Verfahrens. Dieses Wiedererkennen des einen als das andere ist durch den Übersetzungsprozess ausgelöst worden. So bezieht sich die zweite Behandlungsweise auf das, worauf sich schon die erste bezog. Die zwei Behandlungsweisen werden zu Behandlungsweisen desselben, nämlich zu Behandlungsweisen des soeben produzierten Objekts $4 \cdot \frac{x}{x-4}$.

Diese Bildung eines Gegenstands kann nun tatsächlich als Substitution explizit gemacht werden, und zwar als Substitution zweier verbaler Beschreibungen. Die beiden Strukturierungen von $4 \cdot \frac{x}{x-4}$, jene als Multiplikation und jene als Summand, können nämlich gegenseitig so substituiert werden, dass sie immer noch auf $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ verweisen. Bei der Gleichung $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$ kann man sowohl von der Multiplikation $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ als auch vom Summanden $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ sprechen und meint beide Male $4 \cdot \frac{x}{x-4}$. Also können diese beiden Strukturierungen wechselseitig substituiert werden, ohne dass der Gegenstand (nämlich $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ in $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$), auf den sie verweisen, sich ändert.

Dieses Beispiel dokumentiert, wie eine Umstrukturierung als eine Handlung des Wiedererkennens begriffen und als Substitution explizit gemacht werden kann. Darüber hinaus ist die Leistung von Novize2 immens. Sie hat sich ein neues Objekt kreiert. Ausgangspunkt war die Gleichung $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$. Eine Person, die Terme nur als Prozesse oder Verfahren behandelt, hat hier Mühe, überhaupt einen Teil zu bestimmen, der objektifiziert werden könnte. Denn eine solche Person behandelt jeden identifizierten Teil als Bestandteil eines Verfahrens oder Prozesses und nicht als Teil der Gleichung. Nenner gehören zum Wegmultiplizieren, $\frac{1}{4}$ und $\frac{x}{4}$ zum Ausrechnen der Klammer und Faktoren zum Multiplizieren. Für Personen der Stufe 2 ist es daher nahezu unmöglich, die linke Seite der Gleichung aufzuteilen, für sie ist der Term links einfach eine „lange Schlange“. Sie haben keine Anhaltspunkte, um auf einen Teil aus dieser langen Schlange unterschiedlich Bezug zu nehmen. Bei Novize2 (Stufe 3) dauerte der Prozess des Umstrukturierens lange, nahezu eine halbe Minute. Sie musste sich die zweite Strukturierung hart erarbeiten, da sie das

Objekt erst generieren musste. Experten hingegen strukturieren augenblicklich um, da sie die Ausdrücke schon als Objekte behandeln können.

Fazit

Umstrukturieren ist ein Wiedererkennen, das als Substitution explizit gemacht werden kann. Solche Substitutionen drücken unterschiedliche Beschreibungsweisen aus. Diese (substitutions)äquivalenten Beschreibungsweisen sind erstens Redeweisen, wie über eine bestimmte Zeichenkombination gesprochen respektive auf sie verwiesen werden kann. Zweitens entsprechen sie Möglichkeiten, als was diese Zeichenkombination algebraisch behandelt werden kann. Insgesamt ermöglichen diese unterschiedlichen Beschreibungsweisen eine Behandlung der Zeichenkombination als Objekt.

Auf der formalen Ebene kann Brandom (2000) zufolge die Menge der (substitutions)äquivalenten Beschreibungsweisen als Äquivalenzklasse verstanden werden. Formal entspricht diese Äquivalenzklasse dem Objekt, das heißt, dem als Objekt begriffenen algebraischen Ausdruck. Font, Godino und Gallardo (2013, S. 119) sprechen vom „globalen Referenten“. Dieser Begriff spiegelt genau den Sinn der Elemente dieser Äquivalenzklasse. Jedes von ihnen verweist (referiert) auf das Objekt. Denn jedes Element einer Äquivalenzklasse ist nach Definition ein Repräsentant von ihr.

Mit der Gleichsetzung von Umstrukturierung und Generierung eines Objekts ist ein Vorschlag gemacht, wie die *Emergenz* von Objekten (Font, Godino & Gallardo, 2013) beziehungsweise die *Reifikation* zu Objekten (Sfard, 2008) im Detail beschrieben werden kann, nämlich als Explizierung (von Umstrukturierungen) im Sinne von Brandom. Inwiefern diese Konzeption auf den engen Bereich des kalkülorientierten algebraischen Umformens beschränkt ist, kann Gegenstand von weiteren Arbeiten sein.

6.3.3 Das implizite Wissen des Strukturierens

In Abschnitt 6.3.1 sind Zusammenhänge zwischen dem impliziten Wissen einer Person und ihren Wahrnehmungen aufgezeigt. In diesem Abschnitt werden jene Erkenntnisse auf das Strukturieren algebraischer Ausdrücke angewendet. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage, welche Aspekte der inferentiellen Gliederung des impliziten Wissens für das Strukturieren algebraischer Ausdrücke besonders relevant sind.

Bei einem Experten ist mit einer Gleichung wie $7(16+3x) = 100-3(16+3x)$ ein reichhaltiges, inferentiell gegliedertes implizites Wissen verbunden. Er kann problemlos einzelne Verfahrensschritte nacheinander ausführen, zum Beispiel zu $10(16+3x) = 100$, dann zu $16+3x = 10$, zu $3x = -6$ und schließlich zu $x = -2$ umformen. Solche Inferenzen heißen im Folgenden *transformatio-*

nale Inferenzen. Sie bestehen in Umformungsschritten, typischerweise (aber nicht nur) längs eines Verfahrens. Eine transformationale Inferenz ist also ein Schluss von einem Ausdruck auf den umgeformten Ausdruck. Der Experte kann aber auch problemlos einzelne Verfahren miteinander vergleichen. Er kann etwa einen Zwischenschritt des einen Verfahrens auf einen Zwischenschritt eines anderen Verfahrens beziehen, etwa indem er Überlegungen über die Einfachheit der Zwischenresultate anstellt. Beispielsweise kann er die Zwischenschritte des obigen Verfahrens mit jenen des Ausmultiplizierens, Zusammenfassens und Isolierens von x vergleichen. Solche Inferenzen heißen *konversionale* Inferenzen. Sie stellen Zusammenhänge her zwischen den Schritten einzelner Lösungswege, insbesondere ermöglichen sie so auch den Vergleich von Verfahren. Eine konversionale Inferenz ist also ein Zusammenhang zwischen zwei Ausdrücken, die Teile unterschiedlicher Lösungswege sind. Ein besonders wichtiger Fall einer konversionalen Inferenz wird die Übersetzung der einen Strukturierung des gegebenen algebraischen Ausdrucks in die andere sein.

Eine Person, deren implizites Wissen (auch) transformational inferentiell gegliedert ist, orientiert sich beim Strukturieren an den Konsequenzen einer Strukturierung: Sie bezieht in einem Ausdruck die Teile so aufeinander, wie wenn im Ausdruck schon die Konsequenzen dieser Bezüge ständen. Je nach Expertise weiß die Person implizit um die Konsequenzen und strukturiert so, dass diese Konsequenzen sich ergeben. Dieses Voraussehen von Umformungen korrespondiert also zur transformationalen inferentiellen Gliederung des impliziten Wissens – zu einem entsprechenden transformationalen Ast. Die konversionale inferentielle Gliederung hingegen bestimmt die Wahl der möglichen Konsequenzen. Typischerweise ist ein algebraischer Ausdruck auf unterschiedliche Arten umformbar. Ein Experte weiß implizit um die Vielfalt dieser Möglichkeiten und wählt die angemessenste Konsequenz aus.

Die Begriffe der transformationalen und konversionalen Inferenzen lehnen an *Treatments* und *Conversionen* von Duval (2006) an. Er definiert *Treatments* als Übergänge innerhalb desselben Darstellungssystems, *Conversionen* als Übergänge zwischen Darstellungssystemen, also als Darstellungswechsel. Der Bezug zwischen der Arbeit von Duval und der Arbeit hier kann so hergestellt werden, dass Verfahren mit Darstellungen verglichen werden. Die Übergänge innerhalb einer Darstellung entsprechen den Umformungen längs eines Verfahrens und die Übergänge zwischen Darstellungen dem Aufeinanderbeziehen von Verfahren. Daher wird im letzteren Fall von konversionalen Inferenzen gesprochen. Hingegen wird in der vorgelegten Arbeit von transformalen Inferenzen statt einer Wortkombination mit „Treatments“ gesprochen. Denn bei algebraischen Zeichensystem können sowohl im deutsch- als auch im englischsprachigen Raum Umformungen als „Transformationen“ bezeichnet werden.

Transformationale und konversionale Inferenzen beim Strukturieren

Transformationale und konversionale Inferenzen gliedern jenen Teil des impliziten Wissens, der für das Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks relevant ist. Denn sie verbinden sowohl die unterschiedlichen Strukturierungen eines Ausdrucks als auch ihre Konsequenzen. Diese Feststellung basiert auf folgenden Überlegungen und Beobachtungen:

1. Je größer die Expertise einer Person ist, umso eher behandelt sie einen Ausdruck als die Konsequenz der vorgenommenen Strukturierung. Das setzt voraus, dass sie implizit um diese Konsequenzen und daher um transformationale Inferenzen weiß. Beispielsweise „sieht" ein Experte Umformungen voraus (Rüede, 2009), er „antizipiert" diese (Boero, 2001). Das kann er nur, wenn er implizit um die Konsequenzen weiß, die sich aus bestimmten Zeichenreihen ergeben können. Mit diesem impliziten Wissen bezieht er die Teile aufeinander. Er bezieht sie dann so aufeinander, dass sie in der Strukturierung genau jene Rolle spielen, die in der Konsequenz entscheidend sein wird. Personen auf Stufe 3 und 4 konnten etwa $18(7x - 2)$ als Ganzes und zwar als Subtrahend behandeln, weil sie dem Minuszeichen vor $18(7x - 2)$ schon in der Gleichung $4(3x+9) = (7x-2)\cdot 18-18(7x-2)$ diese Bedeutung zuweisen konnten.

2. Je größer die Expertise einer Person ist, umso eher kann sie Zwischenschritte unterschiedlicher Verfahren miteinander verbinden, das heißt, sie stellt konversionale Inferenzen her. Die Empirie in den Kapiteln 4 und 5 legt nahe, die Ausbildung solcher konversionalen Inferenzen in vier Stufen zu sehen (Abbildung 6.1). Auf der ersten Stufe sind zwei Struk-

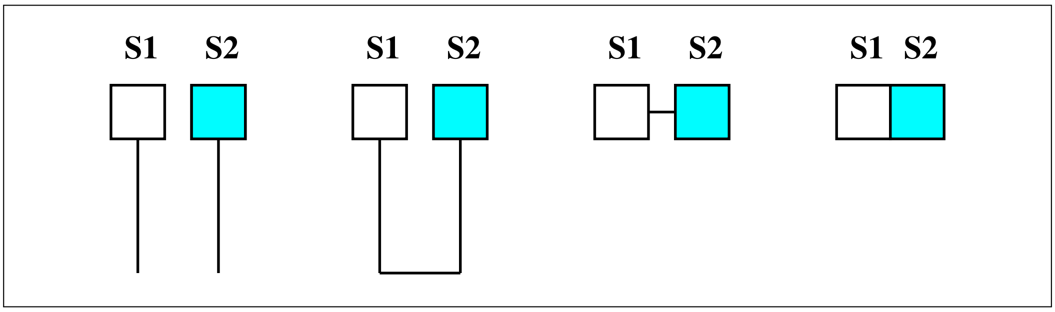

Abbildung 6.1: Vier Stufen der Ausprägung konversionaler Inferenzen sind dargestellt. S1 und S2 inklusive der jeweiligen Quadrate entsprechen zwei unterschiedlichen Strukturierungen desselben Ausdrucks. Ihre Konsequenzen sind als Linien nach unten symbolisiert. Ganz links sind die Konsequenzen unverbunden, dann sind sie verbunden, dann sind die Strukturierungen verbunden und ganz rechts sind die Strukturierungen Eigenschaften des Ausdrucks

turierungen (S1 und S2) vorerst unverbunden. Ebenso auf der zweiten Stufe, doch hier können die Personen oftmals die Konsequenzen zweier Strukturierungen verbinden. Auf der dritten und vierten Stufe sind zwei Strukturierungen direkt verbunden, wobei auf der dritten Stufe die Verbindung gerade hergestellt wird und auf der vierten Stufe das Objekt das Verbindungsglied ist.

3. Je größer die Expertise einer Person ist, umso eher behandelt sie einen algebraischen Ausdruck als Objekt. Das bedingt, dass sie unterschiedliche Strukturierungen des Ausdrucks ineinander übersetzen kann, was einer konversionalen Inferenz entspricht. Je reichhaltiger die transformationale und konversionale inferentielle Gliederung des impliziten Wissens einer Person über algebraische Ausdrücke ist, umso leichter fällt ihr die Übersetzung zwischen den Strukturierungen.

Die vorgelegte Arbeit betont die Wichtigkeit von Verbindungen sowohl zwischen den Strukturierungen eines Ausdrucks als auch zwischen den Konsequenzen solcher Strukturierungen und selbst zwischen den Strukturierungen und ihren Konsequenzen. Damit bestätigt sie allgemeinere mathematikdidaktische Konzeptionen von Wissen, die die Beziehungen zwischen einzelnen Wissenskomponenten als Charakteristikum von mathematischer Expertise hervorheben, und das unabhängig vom jeweiligen theoretischen Hintergrund. Weil die vorgelegte Arbeit Werken wie Brandom (2000) und Schacht (2012) folgt, verwendet sie das Konzept der Inferenzen zur Beschreibung solcher Beziehungen respektive Verbindungen. Andere in der Semiotik zu verortende Arbeiten gebrauchen Termini wie begriffliche Beziehungen (Steinbring, 1998) oder Netzwerke respektive Konfigurationen (Font, Godino & Gallardo, 2013). Kognitionspsychologisch orientierte Arbeiten sprechen zum Beispiel von Netzwerken, Verknüpfungen und Beziehungen (Aebli, 1980, 1981; Crowley & Tall, 1999; Drollinger-Vetter, 2011; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert und Lefevre, 1986). Schließlich bringen Theorien zu Denkstilen (cognitive styles) jene Denkstile mit mathematischer Expertise zusammen, bei denen die Herstellung von Bezügen (relations) leicht fällt (Chrysostomou et al., 2013).

6.3.4 Vier Stufen des Strukturierens

In diesem Abschnitt wird ein Stufenmodell des Strukturierens vorgeschlagen. Grundlage ist das Kategoriensystem von Strukturierungen (Abschnitt 6.1.2). In diesem sind Strukturierungen kategorisiert. Das Stufenmodell in Tabelle 6.1 kategorisiert hingegen Personen gemäß ihrem impliziten Wissen hinsichtlich des Strukturierens. Auch wenn die Erfahrungen im Kategorisierungsprozess belegen, dass bei den Novizen und Experten die Mehrheit der

Strukturierungen jeweils derselben Kategorie zugeordnet werden konnte, muss betont werden, dass nun ein hypothetischer Schritt gemacht wird. Es werden nicht empirische Ergebnisse verallgemeinert, sondern es wird abduktiv auf ein theoretisches Modell geschlossen. Dieses Modell wird zuerst beschrieben und anschließend (theoretisch) begründet. Anzumerken bleibt, dass die Personen selbstverständlich nicht immer genau einer Stufe zuzuordnen sind. Denn sie können sich beispielsweise im Übergang zweier benachbarter Stufen befinden oder ihre Zuordnung ist abhängig vom Typ der zu strukturierenden Terme und Gleichungen.

Tabelle 6.1: Stufenmodell des Strukturierens

Strukturierungen sind **unverbunden**		Strukturierungen sind **verbunden**	
Stufe 1: Behandlung des Ausdrucks als **anschauliches Ding**	**Stufe 2:** Behandlung des Ausdrucks als **Verfahren**	**Stufe 3:** Behandlung des Ausdrucks als **neu gebildetes Objekt**	**Stufe 4:** Behandlung des Ausdrucks als **bekanntes Objekt**
Unterschiedliche Strukturierungen als unterschiedliche Streichmechanismen	Unterschiedliche Strukturierungen als unterschiedliche Verfahren	Unterschiedliche Strukturierungen durch Umstrukturierung	Unterschiedliche Strukturierungen als Eigenschaften des Ausdrucks
Weder transformationale noch konversionale Inferenzen	Meist transformationale Inferenzen, konversionale nur zwischen Konsequenzen	Herstellung auch von konversionalen Inferenzen	Transformationale und konversionale Inferenzen

Ähnlich aussehende Teile sind wichtig. Ziel: Ausdruck optisch einfacher machen	Teile des Ausdrucks als Teile eines Verfahrens behandeln. Ziel: das Verfahren ausführen	Teile des Ausdrucks aufeinander beziehen, um Verfahren anzuwenden oder um mathematische Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Ziel: Aufgabe lösen	Teile des Ausdrucks aufeinander beziehen, um Vermutungen über die Klassifikation des Ausdrucks aufzustellen. Ziel: einfachen Lösungsweg finden
Kein Wie, kein Wann. **Keine** (angemessenen) **Verfahren**	Nur Wie, kein Wann. **Verfahren-basiert**es Strukturieren	Wie und Wann. Generierung neuer Vorgehen. **Verfahrenbildend**es Strukturieren	Wie und Wann. **Explorierend**es Strukturieren

Tabelle 6.1 ist in zwei Hälften gegliedert. Diese Trennung ist vorwiegend theoretisch motiviert. Sie streicht heraus, dass die Bildung von Objekten erst mit der Stufe 3 beginnt. Das ist ein qualitativer Sprung, wie Sfard (1991, S. 30) betont: "Reification is an ontological shift, a qualitative jump." Und diese Reifizierung respektive Bildung von Objekten wird als Herstellung konversionaler Verbindungen zwischen Strukturierungen des gleichen Ausdrucks verstanden (vgl. Abbildung 6.1): Entweder sind die von einer Person vorgenommenen Strukturierungen eines Ausdrucks inferentiell unverbunden oder miteinander verbunden (und sie geben zu einem Objekt Anlass). Eine inferentielle Verbindung zwischen Strukturierungen desselben Ausdrucks besteht auf den Stufen 3 und 4. Im Detail sieht das so aus:

– Eine Person auf der Stufe 3 kann einen Ausdruck umstrukturieren und stellt dabei eine konversionale Inferenz her. Sie übersetzt die erste Strukturierung in die zweite. Die resultierenden Umformungen werden so zu Umformungen desselben.

– Eine Person auf der Stufe 4 behandelt zwei unterschiedliche Strukturierungen eines algebraischen Ausdrucks als Eigenschaften des Ausdrucks. Der Ausdruck ist das Bindeglied zwischen den beiden Strukturierungen, er verbindet sie und gibt Anlass zur konversionalen Inferenz zwischen den Strukturierungen. Zwei Strukturierungen eines Ausdrucks sind Strukturierungen des Objekts.

Personen auf der Stufe 1 und 2 behandeln jede Strukturierung eines Ausdrucks als etwas Einzelnes. Auf Stufe 3 und 4 verbinden die Personen hingegen die

Strukturierungen miteinander: Der Ausdruck wird zum Objekt und schließlich als solches begriffen. Es folgt eine Beschreibung der vier Stufen im Detail.

Stufe 1: Behandlung des Ausdrucks als anschauliches Ding

Eine Person der Stufe 1 behandelt einen algebraischen Ausdruck als anschauliches Ding, das losgelöst von den mathematischen Regeln und der damit verbundenen (kulturellen) Praxis ist. Sie weiß nicht um die algebraischen Regeln oder wendet sie mehrheitlich inkorrekt an. Auch führt sie weder ein Verfahren korrekt aus, noch bildet oder wählt sie gar eines aus. Daher strukturiert die Person mehrheitlich idiosynkratisch. Ihre hergestellten Bezüge spiegeln das, worauf sie in einem Ausdruck achtet: auf syntaktische Gemeinsamkeiten und auf das, was ihr als ähnlich erscheint. Daher orientieren sich ihre Strukturierungen nur an den konkreten, äußeren Merkmalen des Ausdrucks. Entsprechend ist das Ziel ein (für die Person) optisch schönes Ergebnis.

Beispielsweise könnte eine solche Person dazu neigen, in $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ die beiden Nenner aufeinander zu beziehen, um sie aufgrund des Minuszeichens wegzustreichen. Ebenso möglich wäre für diese Person, die $2x$ im ersten Zähler auf die $2x$ im ersten Nenner zu beziehen mit der Absicht der Division. In diesem Fall lägen zwei unterschiedliche Strukturierungen vor. Diese sind unabhängig voneinander. Denn das erste Mal war das Merkmal der beiden gleichen Nenner Auslöser und das zweite Mal das Merkmal der gleichen $2x$ im ersten Bruch. Diese Merkmale haben nichts miteinander zu tun, denn sie sind prinzipiell von akzidentiellem Charakter. Als Folge begreift die Person die damit verbundenen Strukturierungen als unabhängig voneinander. Sie sind miteinander nicht verbunden.

Das Strukturieren ist auf dieser Stufe also weder von Verfahren noch von mathematischen Gesetzmäßigkeiten geleitet. Der Grund liegt im unausgebildeten impliziten Wissen. Die Person stellt nahezu keine transformationalen und keine konversionalen Inferenzen her. Wenn eine Person über kein respektive nur ein kleines implizites Wissen verfügt, liegt es verständlicherweise nahe, dass sie sich am optisch Ähnlichem orientiert. Die entsprechenden Strukturierungen sind daher nah an dem, was empirisch vorliegt. Beispielsweise bezog Novize6 in der Gleichung $4(3x+9) = (7x-2) \cdot 18 - 18(7x-2)$ die beiden 18 subtraktiv aufeinander (Abschnitt 5.2.2). Das fehlende implizite Wissen von Novize6 führte zur unangemessenen Wahrnehmung der Gleichung.

Stufe 2: Behandlung des Ausdrucks als Prozess

Eine Person der Stufe 2 behandelt einen Ausdruck als Befehl zur Ausführung eines Verfahrens. Sie richtet alles auf die Ausführung dieses Verfahrens aus. Darauf fokussiert sie und so rückt der Ausdruck selbst in den Hintergrund.

Im Zusammenhang mit der Arithmetik notierte etwa Gray (1991, S. 569):

> "More importantly however, many of the younger children within this group could not remember the problem that had triggered their procedure. The link between the numerical problem and its solution had been obscured by the lengthy counting routine that had been used to obtain the solution."

Oder im Zusammenhang mit der Art der Aufmerksamkeit (attention) von Kindern auf die Ausführung von Berechnungen, ausgelöst durch vorgelegte Ausdrücke, vermerkten Molina und Mason (2009, S. 235):

> "Their attention seemed to be focused on, even absorbed by, the calculations. As we later discuss, it may be that the more challenging the computation, the more attention is required to carry out the calculation, holding temporary results and so on, so that other features of the statement fade into the background."

Entsprechend behandelt die Person dieser Stufe die Teile, die sie in der Strukturierung aufeinander bezieht, nur als „Bestandteile des Verfahrens" – und nicht als Teile des Ausdrucks. Diese Bestandteile bezieht sie so aufeinander, wie das Verfahren es vorgibt. Daher stellt sie beispielsweise keine Bezüge her, um den Aufbau des Terms respektive der Gleichung zu untersuchen. Ebenso stellt sie auch keine Bezüge her, um die Anwendung von Rechenregeln zu explorieren. Solche Geschichten spielen bei dieser Person einfach keine Rolle, sie werden nicht berücksichtigt. Selbst wenn die Person etwa denselben Lösungsweg beim schriftlichen Lösen einer Gleichung notiert wie ein Experte, so sind die zugrunde liegenden Betrachtungen fundamental anders. Der Experte könnte im Nachhinein etwas über den Aufbau der Gleichung sagen, beispielsweise mit großer Wahrscheinlichkeit die zuletzt auszuführende Operation auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nennen (Fischer, 1984). Ebenso könnte er darüber berichten, welche Teile der Gleichung er als eine Entität behandelt. Über solche Sachen wüsste obige Person aber nichts zu sagen, denn für sie ist das Ziel einzig und allein die Ausführung des Verfahrens – und nicht das Vereinfachen eines Terms oder Lösen einer Gleichung. Aus diesem Grund bezieht sie nur jene Teile im Ausdruck aufeinander, die sie dazu braucht, mit der Folge, dass aufgrund der Unterschiedlichkeit der Verfahren sie auch verschiedene Strukturierungen desselben Ausdrucks als unverbunden versteht.

Diese Stufe des Strukturierens basiert auf einem impliziten Wissen, das mehrheitlich transformational inferentiell gegliedert ist, aber nur wenig konversional. Die entsprechenden Personen wenden etwa die Regeln mehrheitlich korrekt an, entsprechend führen die hergestellten Strukturierungen auf korrekte Umformungen. Allerdings fokussieren die Personen dieser Stufe einzig darauf. Sie beherrschen nur das Wie der Regeln und Verfahren, aber nicht das Wann. Daher behandeln sie die Ausdrücke nur als Verfahren. Strukturieren diese Personen denselben Ausdruck auf zwei unterschiedliche Arten, verstehen sie das als zwei unterschiedliche Aufgaben. Sie verbinden die beiden Strukturierungen nicht, denn es fehlen ihnen die dafür notwendigen konversionalen Inferenzen. Erste konversionale Inferenzen stellen sie hingegen zwischen Konsequenzen von Strukturierungen her. Beispielsweise ist eine Person vorstellbar, die einen Ausdruck ein zweites Mal und anders strukturiert und unsicher über die Korrektheit der resultierenden Umformung ist. In diesem Fall würde die Person vermutlich weitere Konsequenzen erschließen und schauen, ob es dieselben wie beim ersten Lösungsweg sind. Wenn es dieselben sind, dann würde sie auch die Strukturierung akzeptieren. Dieser Vergleich wäre eine konversionale Inferenz zwischen den beiden Konsequenzen. Es ist ein erster Schritt hin zum Aufbau von konversionalen Inferenzen zwischen Strukturierungen.

Ein Beispiel zur Illustration: Novize3 behandelte die Gleichung $13(x-6)+15=15$ als Verfahren. Aufgrund der Klammer multiplizierte er $13(x-6)$ aus, fasste dann zu $13x-63=15$ zusammen, isolierte x und erhielt $x=6$. Sein diesbezügliches Wissen scheint vorwiegend transformational inferentiell gegliedert zu sein. Er weiß, dass zu Beginn das Ausklammern wesentlich ist. Das trug er an die Gleichung heran und schaute folglich nur darauf. Sein implizites Wissen bestimmte sein Strukturieren. Es ist davon auszugehen, dass er die linke Seite von $13(x-6)+15$ nie als Summe begriff, sondern nur als Situation, in der auszumultiplizieren ist. Wesentlich war der Bezug von 13 auf x und von 13 auf 6. Er beherrschte aber nicht nur diese transformationalen Inferenzen, sondern stellte auch konversionale Inferenzen zwischen Konsequenzen von Strukturierungen her. Als alternativen Lösungsweg schlug er unter anderem nämlich vor, zuerst auf beiden Seiten von $13(x-6)+15=15$ die 15 zu subtrahieren. Im Abschnitt 5.2.6 ist argumentiert, dass es sich hier um eine neue Strukturierung handelt, nicht aber um eine Umstrukturierung. Nichtsdestotrotz erhielt er wiederum $x=6$. Er verglich beide Resultate miteinander und erkannte, dass sie gleich sind: eine konversionale Inferenz zwischen den Konsequenzen. Dies nutzte er als Beleg für die Korrekheit des zweiten Lösungswegs. Sicher ein erster Schritt in Richtung der Ausbildung eines Wann.

Stufe 3: Behandlung des Ausdrucks als neu gebildetes Objekt

Eine Person der Stufe 3 ist in der Lage, aus einer bestehenden Strukturierung eine zweite zu generieren. Sie gewinnt die zweite Strukturierung durch Übersetzung aus der ersten. Dadurch sind die beiden Strukturierungen miteinander verbunden. Die Person hat eine konversionale Inferenz zwischen zwei Strukturierungen und somit ein neues Objekt erschaffen.

Personen der Stufe 3 können also konversionale Inferenzen zwischen Strukturierungen ziehen. Das führt zu einem ausgebildeten Wann. Personen dieser Stufe evaluieren ihre Strukturierungen selbständig. Sie haben das Ziel, zum Beispiel die Gleichung zu lösen oder den Term zu vereinfachen. Sie wollen nicht einfach ein Verfahren ausführen. Also suchen sie nach angemessenen Strukturierungen. Sobald sie eine Strukturierung verworfen haben, weil sie dem Lösen der Aufgabe nicht dienlich ist, strukturieren sie den Ausdruck um. Insgesamt führt das zu ersten Behandlungen von Ausdrücken als Objekt. Und somit zu ersten Verbindungen von Strukturierungen, da die Personen Strukturierungen zunehmend dem Ausdruck und nicht dem Verfahren zuweisen. Der Ausdruck beginnt die Strukturierungen zu verbinden.

Als Beispiel für eine solche Umstrukturierung sei auf Novize8 verwiesen, die $4(3x+9) = (7x-2) \cdot 18 - 18(7x-2)$ ein zweites Mal strukturierte (Abschnitt 5.2.4). In der ersten Strukturierung behandelte sie das mittlere Minuszeichen auf der rechten Seite als Vorzeichen, sie multiplizierte aus. Grund war wohl die transformationale inferentielle Gliederung ihres impliziten Wissens: Beim Ausmultiplizieren bestimmt das Zeichen vor der Klammer die definitiven Vorzeichen. Aufgrund dieser antizipierten Konsequenz behandelte sie das Minuszeichen entsprechend. So erhielt sie auf der rechten Seite $126x-36-126x+36$. Dann subtrahierte sie $126x$ von $126x$ (und verrechnete auch die beiden 36 zu 0). Hier behandelte sie das Minuszeichen dann als Operationszeichen. Das Wissen um diese Konsequenz wurde so vermutlich Teil des Wissens, das sie implizit zur Produktion der zweiten Strukturierung nutzte. Sie behandelte bei der zweiten Strukturierung das Minuszeichen in der Mitte der rechten Seite so, wie es beim Wegsubtrahieren wichtig war, nämlich als Operationszeichen. Diese Übersetzung erarbeitete sich die Schülerin beim Bearbeiten der Gleichung und generierte so die konversionale Inferenz.

Solche Umstrukturierungen führen zu neuen Verfahren. Daher sind die dahinter liegenden Strukturierungen als *verfahrenbildend* bezeichnet.

Stufe 4: Behandlung des Ausdrucks als bekanntes Objekt

Die Stufe 4 ist jene der Experten. Indem die Experten unterschiedliche Strukturierungen als Eigenschaften des Ausdrucks behandeln, sind diese Strukturierungen durch konversionale Inferenzen miteinander verbunden. Die algebraischen Ausdrücke sind für die Experten Objekte. Für sie stellt sich nur noch die Frage, welche der vielen Eigenschaften eines Ausdrucks zum einfachsten Lösungsweg beitragen. Sie vermuten erste Lösungswege, stellen erste Strukturierungen her, um ihre Vermutung zu belegen oder zu verwerfen, und vermuten im Falle des Verwerfens weitere Strukturierungen. Das Ziel der Strukturierung ist das Testen der aufgestellten Vermutung. Daher sind die produzierten Strukturierungen als *explorierend* bezeichnet.

Der Grund dieser Eloquenz liegt im sowohl transformational als auch konversional detailliert inferentiell gegliederten impliziten Wissen. Beispielsweise wusste Experte1 – wie in Abschnitt 5.2.5 beschrieben – um die Konsequenz einer Zeichenreihe wie sie auf der rechten Seite von $4(3x + 9) = (7x - 2) \cdot 18 - 18(7x - 2)$ vorlag. Sie wusste um die Kommutativität und um das Verrechnen von Ausdrücken der Form $A - A$ und strukturierte die rechte Seite mit diesem impliziten Wissen. Daher konnte sie je den Teil links und rechts des Minuszeichens so aufeinander beziehen, dass das Wegsubtrahieren offensichtlich wurde.

Die Reihenfolge der vier Stufen

Die Reihenfolge der Stufen ist nicht zufällig gewählt. Vielmehr setzt jede der vier Stufen mehr als die vorhergehende voraus. In diesem Sinne können die vier Stufen auch als Fähigkeitsstufen verstanden werden: Lernende müssen erst ein Wissen vom Wie haben, bevor sie Fragen des Wann angehen können. Und erst mit der Behandlung des Wann werden Umstrukturierungen möglich. Zur Stützung dieser These wird nun begriffsanalytisch argumentiert.

Eine Person der Stufe 2 – nicht aber der Stufe 1 – kann die Korrektheit der Regelanwendung mehrheitlich richtig einschätzen. Eine Person der Stufe 1 kann das nicht. Sie weiß nicht um die Anwendung von Regeln des algebraischen Kalküls. Daher produziert sie mehrheitlich idiosynkratische Strukturierungen, die sich einzig an optischen Auffälligkeiten der zweidimensionalen Anordnung des Ausdrucks orientieren. In diesem Sinn weiß eine Person der Stufe 2 mehr als eine der Stufe 1.

Das Wann einer Strukturierung ist immer das Wann eines Wie. Mit anderen Worten: Man muss zuerst wissen, wie man strukturieren kann, um dann fragen zu können, wann so strukturiert werden soll. Die Frage des Wann stellt sich also erst, wenn ein Wie vorhanden ist. Aus diesem Grund setzt die Stufe 3 ein Wissen um das Wie und somit das Wissen der Stufe 2 voraus. Man kann auch sagen: Umstrukturiert kann nur das werden, was schon strukturiert ist.

Die Stufe 4 ist die höchste Stufe. Sie basiert darauf, dass man den Ausdruck als Objekt behandelt. Und dieses Objekt muss notwendigerweise schon produziert worden sein. Die Stufe 4 umfasst mehr als Stufe 3.

Aufgrund dieser begriffsanalytischen Argumentation ist erklärt, warum die Stufen 1, 2, 3 und 4 gerade in dieser Reihenfolge gegeben sind und nicht in einer anderen. In diesem Sinne handelt es sich um Fähigkeitsstufen des Strukturierens. Inwiefern die Stufen Entwicklungsstufen sind, ist Thema von Abschnitt 6.3.5. Dort wird dargelegt, inwiefern eine Stufung der Behandlung eines Ausdrucks als Objekt gegeben ist, insbesondere, inwiefern diese Stufung einem Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansatz entspricht.

6.3.5 Eine Theorie zur Entwicklung des Strukturierens

In diesem Abschnitt wird argumentiert, dass die vier Stufen sogar als Entwicklungsstufen verstanden werden können. Das führt zu einer Theorie, welche klassische Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze wesentlich erweitert. Die Argumentationslinie ist die, dass die Entwicklung des Strukturierens anfänglich vor allem mit der Ausbildung der transformationalen und später zunehmend auch der konversionalen inferentiellen Gliederung des impliziten Wissens (im Hinblick auf das Strukturieren algebraischer Ausdrücke) einhergeht: Das implizite Wissen einer Person der Stufe 1 ist weder transformational noch konversional inferentiell gegliedert. Jenes einer Person der Stufe 2 ist hingegen transformational gegliedert. Diese Person kann auch erste konversionale Inferenzen zwischen Konsequenzen von Strukturierungen herstellen. Das „Wissen, wie“ einer Person der Stufe 3 ist transformational und auch leicht konversional inferentiell gegliedert. Eine solche Person kann sogar erste konversionale Inferenzen zwischen Strukturierungen generieren (und nicht nur zwischen deren Konsequenzen). Schließlich ist die inferentielle Gliederung des impliziten Wissens einer Person der Stufe 4 vielfältig transformational und konversional.

Anhand einer solchen Zusammenstellung der inferentiellen Gliederung des impliziten Wissens scheinen sich die folgenden Richtungen abzuzeichnen: Die transformationale inferentielle Gliederung entwickelt sich so, dass anfänglich Konsequenzen einbezogen sind, die nahezu direkt aus der Strukturierung folgen, und erst danach jene Konsequenzen wichtig werden, die eine Folge von mehreren Umformungsschritten sind. Die Entwicklung der konversionalen inferentiellen Gliederung hingegen scheint gegenläufig zu sein. Zu Beginn beziehen die Personen Konsequenzen aufeinander und erst danach stellen sie Zusammenhänge zwischen den zugrunde liegenden Strukturierungen her. In Abbildung 6.2 sind diese Entwicklungsrichtungen als grau hinterlegte Pfeile dargestellt, von oben nach unten (transformational) und von unten nach oben (konversional). Darüber hinaus sind in Abbildung 6.2 zwei Typen von Strukturierungen symbolisiert, eine „innere“ und eine „äußere“. Damit sind zwei Typen gemeint, die sich aus den in dieser Arbeit vorgestellten Beispielen des Umstrukturierens ableiten lassen (Kapitel 4 und 5): Entweder werden beim Umstrukturieren mehrere Zeichen zu einem ganzen Teil zusammengefasst oder eine Einheit von Zeichen wird aufgebrochen und in mehrere Teile aufgeteilt. Ein Beispiel für den ersten Fall ist die Umstrukturierung von der Multiplikation $4 \cdot \frac{x}{x-4}$ in $(\frac{1}{4} - \frac{x}{4}) \cdot \frac{x}{4x+1} + 4 \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{4x}{x-4}$ zum Summanden $4 \cdot \frac{x}{x-4}$, wie in Abschnitt 6.3.2 beschrieben. Eine Multiplikation wird zu einem ganzen Teil, zu einem Summanden, zusammengefasst. Man strukturiert *von innen nach außen* um. Ein Beispiel für den zweiten Fall ist die Umstrukturierung der Summanden $40x^3$ und $60x^2$ in $40x^3 + 60x^2 = 12x + 8$ zu Multiplikationen von Zehnerzahlen mit x-Potenzen – und schließlich zu $20x^2 \cdot 2x$ und $20x^2 \cdot 3$, wie

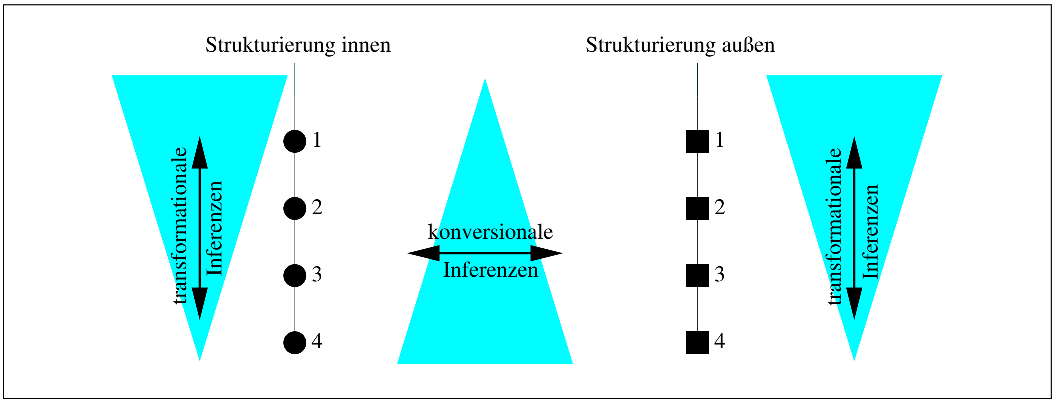

Abbildung 6.2: Darstellung der Entwicklung des Strukturierens. Die senkrechte Kette mit den Kreisen respektive die mit den Quadraten entspricht je einer Folge von Umformungen 1, 2, 3, 4, ausgehend von der „Strukturierung innen“ respektive der „Strukturierung außen“, die Kreise und Quadrate symbolisieren somit je den entsprechend umgeformten Ausdruck. Die Pfeile der transformationalen Inferenzen zeigen, dass jeweils Knotenpunkte derselben Folge miteinander verbunden werden, die konversionalen Inferenzen verbinden die beiden Folgen. Die großen grauen Pfeile im Hintergrund geben die Richtung an, in die sich die Fähigkeit zur Bildung solcher Inferenzen entwickelt.

in Abschnitt 4.2.3 beschrieben. Eine Einheit von Zeichen wird aufgebrochen in zwei Teile. Man strukturiert *von außen nach innen* um.

Die Entwicklung des Strukturierens besteht nun darin, eine sowohl transformationale als auch konversionale inferentielle Gliederung des impliziten Wissens im Hinblick auf das Strukturieren auszubilden, und zwar gemäß den in Abbildung 6.2 dargestellten Entwicklungsrichtungen: einerseits transformational von oben nach unten sowie konversional von unten nach oben, andererseits entweder von innen nach außen oder von außen nach innen.

Es wird also nicht gefordert, dass Lernende zuerst „innere“ Strukturierungen und erst dann „äußere“ Strukturierungen herstellen. Das ist der zentrale Unterschied zu den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen, denn diese postulieren, dass Lernende einen algebraischen Ausdruck zuerst als Prozess und erst dann als Objekt behandeln können. Das würde bedeuten, dass Umstrukturierungen immer von innen nach außen verlaufen. In den hier vorgestellten empirischen Studien war dies aber nicht der Fall. Manche Lernende strukturierten auch von außen nach innen um und generierten sich die Objekte aufgrund solcher Umstrukturierungen.

Die Rolle von Verfahren

Verfahren spielen beim kalkülorientierten Umformen eine wesentliche Rolle. Personen der Stufen 2, 3 und 4 nutzen Verfahren. Wichtig zu erwähnen ist aber, dass der Gebrauch dieser Verfahren je nach Stufe ein anderer ist. Eine Person der Stufe 2 behandelt einen algebraischen Ausdruck als Verfahren. Eine Person der Stufe 3 generiert sich hingegen ein neues Objekt. Der algebraische Ausdruck wird daher nicht mehr als Verfahren behandelt, sondern bekommt die Eigenschaft, dass auf ihn ein Verfahren angewendet werden kann. Schließlich behandelt eine Person der Stufe 4 einen algebraischen Ausdruck als Objekt und testet abhängig von der gestellten Aufgabe, welches der möglichen Verfahren zum einfachsten Lösungsweg führt.

Unabhängig von der Stufe aber, zu der eine Person gehört, ist die folgende Beobachtung wichtig: Wer ein Verfahren nutzt, stellt eher eine „äußere" Strukturierung her als eine „innere". Denn bei einem Verfahren muss man oftmals bestimmte Zeichen in einem Ausdruck zu einer Einheit zusammenfassen, mit der dann operiert wird. Beispielsweise wird der Nenner in einer Bruchtermgleichung wie $\frac{2x+3}{2x-3} + 1 = 0$, jeder Summand in einer linearen Gleichung wie $2x + 15 = 6x - 2x$ oder der Radikand in einer Wurzelgleichung wie $2 - 3x = \sqrt{2x+1}$ wichtig und nicht jeweils das einzelne Zeichen in einer solchen Einheit. Das hat zwei entscheidende Implikationen zur Folge:

1. Da ein Verfahren oftmals den Blick auf obengenannte Einheiten lenkt, sind Umstrukturierungen von außen nach innen vollkommen natürlich und oft sogar notwendig.

2. Wer Terme lernt umzuformen, muss diese anfänglich nicht zwingend als Prozesse behandeln. Er oder sie kann Terme anfänglich auch als Verfahren behandeln. Nur jene Lernenden, die Terme zu Beginn vor allem nur auswerten (müssen), indem sie Zahlen für die Variablen einsetzen, werden anfänglich Terme als Prozesse behandeln. Ihr implizites Wissen besteht in jenen Handlungen, die der Auswertung von Termen dienen. Entsprechend orientieren sich die Strukturierungen dieser Lernenden an diesen Konsequenzen: Sie behandeln die Terme als Prozesse. Andere Lernende aber, die vor allem Verfahren an Terme herangetragen haben, werden Terme als Verfahren behandeln. Ihr implizites Wissen orientiert sich an den einzelnen Verfahrensschritten. Aufgrund solcher Konsequenzen beziehen sie die Teile in einem Term aufeinander.

Diese Feststellung löst meines Erachtens einen widersprüchlichen Befund auf, der sich in der aktuellen Algebradidaktik findet.

1. Empirische Resultate, wie etwa in Sfard (2008) oder Gray und Tall (1994) dokumentiert, stützen die These, dass Lernende algebraische Terme aus entwicklungslogischen Gründen zuerst als Prozesse und erst dann

als Objekte behandeln. Dem widersprechen aber empirische Studien wie jene von Gilmore und Inglis (2008) – vgl. Abschnitt 2.5.5 –, Hewitt (2012) oder Nogueira de Lima und Tall (2008). In diesen Arbeiten wird berichtet, wie Anfänger jeweils schon zu Beginn mit ganzen Einheiten operierten und so die einzelnen Terme nicht als Prozesse behandelten. Sowohl Gilmore und Inglis (2008) als auch Hewitt (2012) schlossen daraus auf eine Behandlung der Terme als Objekte, die der Behandlung der Terme als Prozesse voranging.

Die vorgelegte Arbeit lässt nun folgende Antwort zu: Sowohl in der Studie von Gilmore und Inglis (2006) als auch in Hewitt (2012) handelten Anfänger mit Bündeln von Zeichen, aber nicht im Sinne von Objekten, sondern im Sinne von Verfahren. Denn die beobachteten Anfänger stellten keine Verbindungen zwischen ihren Behandlungsweisen her – zumindest sind solche in den entsprechenden Veröffentlichungen nicht dokumentiert. Insbesondere übersetzten sie unterschiedliche Behandlungsweisen desselben nicht ineinander. Es kann daher meines Erachtens nicht von einer Behandlung eines Terms als Objekt gesprochen werden.

2. Viele Studien votieren für den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansatz, etwa Dubinsky (1991), Gray und Tall (1994), Sfard (1991, 2008). Andere grenzen sich davon ab, etwa Font, Godino und Gallardo (2013), Radford (2003) und Santi (2011), vgl. auch Abschnitt 2.5.

   Die letzteren Ansätze sind viel breiter konzipiert als die hier vorgelegte Arbeit. Sie thematisieren beliebige mathematische Lernprozesse und nicht nur Umformungen im algebraischen Kalkül. Trotzdem ist die hier vorgeschlagene Entwicklung des Strukturierens diesen Ansätzen zuzuordnen und nicht den Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen. Denn sie begreifen allesamt die Bildung mathematischer Expertise als Bildung von Übergängen zwischen unterschiedlichen Erscheinungsarten („way of appearance", Radford, 2003, S. 43). Diese Erscheinungsarten sind die Analoga zu den Strukturierungen und die entsprechenden Übergänge jene zu den konversionalen Inferenzen. Bemerkenswert ist aber, dass die hier vorgeschlagene Entwicklung des Strukturierens sehr wohl Entwicklungen von der Behandlung eines Terms als Prozess hin zum Objekt umfasst. Denn sie lässt offen, ob die Umstrukturierungen vorwiegend von innen nach außen oder von außen nach innen vollzogen werden.

   Denkbar und möglich ist also sehr wohl eine Entwicklung, bei der die Lernenden Terme zuerst als Prozesse und erst später als Objekte zu behandeln lernen. Denkbar und möglich ist aber auch eine andere Entwicklung. Nicht der Typ der Umstrukturierung entscheidet über die Entwicklungsstufe einer Person, sondern ob die Person überhaupt umstrukturieren kann.

Flexibilität

Insgesamt bringt das Stufenmodell zum Ausdruck, dass die Fähigkeit, einen Term als Objekt zu behandeln, von Stufe 1 zu Stufe 4 zunimmt. Das geht mit einer zunehmenden Flexibilität einher. Das stimmt einerseits mit den Resultaten aus der Expertiseforschung überein, welche das flexible Anpassen des Wissens auf neue Problemstellungen als nahezu wichtigstes Kriterium der Expertise herausgearbeitet hat (Gruber & Mandl, 1996; Spiro et al., 1988). Andererseits argumentieren prominente mathematikdidaktische Arbeiten für ein flexibles Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen als zentrales Ziel der algebraischen Ausbildung (Sfard & Linchevski, 1994; Star & Rittle-Johnson, 2007; Tall & Thomas, 1991).

Flexibilität hat auch mit der Einnahme unterschiedlicher Perspektiven zu tun und die Produktion unterschiedlicher Strukturierungen kann als die Einnahme unterschiedlicher Perspektiven verstanden werden. Daher ist zu erwarten, dass Stufenmodelle aus anderen Bereichen, wo der Perspektivenwechsel (ebenso) wichtig ist, Analogien zum Stufenmodell des Strukturierens besitzen. Das ist in der Tat so. Als Beispiel sei auf das Kompetenzmodell der Bewertung ethischer Problemsituationen hingewiesen (Reitschert & Hössle, 2007) sowie auf das Stufenmodell der moralischen Entwicklung von Kohlberg (2001). Letzteres sei kurz skizziert. Grundlage dieses Stufenmodells sind *soziale Perspektiven*. Zu Beginn der moralischen Entwicklung nehmen Personen eine konkret-individuelle Perspektive ein. Sie denken über die eigenen Interessen und über jene von anderen, die ihnen nahestehen, nach. Erst einige Jahre später können sie die Perspektive eines Mitglieds der Gesellschaft einnehmen und etwa Sinn und Zweck von Gesetzen nachvollziehen. Typischerweise ist den Personen dieser Stufe am Wohl der Gesellschaft als Ganzes gelegen. Zentral ist auch bei Kohlberg, dass auf der höchsten Stufe diese beiden Perspektiven miteinander verbunden werden; Sfard (2008) spräche vermutlich von der *Individualisierung* der Perspektive eines Mitglieds der Gesellschaft. Personen dieser Stufe sind in der Lage, sich für die moralische Entwicklung einer Gesellschaft zu engagieren. Einerseits sind solche Personen die moralischen Verpflichtungen eingegangen, sie verkörpern sie. Andererseits ist ihr individueller Standpunkt universalisierbar.

Diese Stufen der moralischen Entwicklung sind zum Stufenmodell des Strukturierens analog. Auch beim Strukturieren scheint es wichtig, zuerst die Perspektive der erlernten Verfahren einnehmen (Stufe 2) und diese dann immer mehr zur eigenen machen zu können, indem man die einzelnen Strukturierungen eines Ausdrucks konversional inferentiell miteinander verbindet.

6.4 Zusammenfassung der Resultate

Das Ziel dieses Kapitels war die Konstruktion eines theoretischen Modells, das die Entwicklung des Strukturierens beschreibt. Die Antwort besteht in einem Stufenmodell (Tabelle 6.1), dessen vier Stufen als Entwicklungsstufen des impliziten Wissens über Strukturierungen von Termen und Gleichungen verstanden werden können (Abschnitt 6.3.4 und 6.3.5).

Als zentral erweisen sich dabei zwei Unterscheidungen: erstens jene von transformationalen und konversionalen Inferenzen und zweitens jene des Umstrukturierens von innen nach außen respektive von außen nach innen. Dabei gelten die folgenden Festlegungen: Transformationale Inferenzen führen von einer Strukturierung zum umgeformten Ausdruck respektive zum noch weiter umgeformten Ausdruck, konversionale Inferenzen verbinden unterschiedliche Strukturierungen desselben Ausdrucks respektive sich daraus ergebende unterschiedlich umgeformte Ausdrücke. Beim Umstrukturieren von innen nach außen werden mehrere Zeichen zu einzelnen Bündeln zusammengefasst, beim Umstrukturieren von außen nach innen wird der ganze Ausdruck in einzelne Teile aufgebrochen. Diese Konzepte führen zur Bestimmung der vier Stufen:

1. Stufe: Die Person stellt weder transformationale noch konversionale Inferenzen her.

2. Stufe: Die Person stellt vorwiegend transformationale Inferenzen her. Konversionale Inferenzen stellt sie nur zwischen den Konsequenzen von Strukturierungen her.

3. Stufe: Die Person kann eine Strukturierung mit einer Umstrukturierung verbinden und stellt dabei eine konversionale Inferenz zwischen diesen beiden Strukturierungen her. Der Ausdruck kann von innen nach außen oder von außen nach innen umstrukturiert worden sein.

4. Stufe: Die Person stellt spontan transformationale und konversionale Inferenzen her.

Dieses Stufenmodell erweitert die Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze insofern, als es keine zwingende Entwicklung von der Behandlung eines Terms als Prozess zu jener als Objekt vorschreibt. Ebenso umfasst es eine Entwicklung von der Behandlung eines Terms als Verfahren hin zu jener als Prozess und dann zur Behandlung des Terms als Objekt. Ziel ist immer die Behandlung als Objekt. Doch auf dem Weg dahin können sich die Behandlung als Prozess und jene als Verfahren abwechseln oder sich miteinander entwickeln.

7 Zur Förderung des Strukturierens

In diesem Kapitel werden zwei Aufgabenformate zur Förderung des Strukturierens vorgeschlagen. Sie basieren auf dem in Abschnitt 6.3 entwickelten Stufenmodell. Weil meines Erachtens der Schritt von Stufe 2 zu Stufe 3 der entscheidende – und vermutlich auch der schwierigste – ist, fokussiert dieser Abschnitt darauf.

Es ist hilfreich, sich den Unterschied zwischen der Stufe 2 und 3 (nochmals) zu vergegenwärtigen. Personen der Stufe 2 behandeln die Ausdrücke als Verfahren. Die Teile, die sie aufeinander beziehen, behandeln sie nur als Bestandteile des Verfahrens und können sie nicht – wie Personen der Stufe 3 – als Objekte behandeln. Personen der Stufe 2 beziehen die Teile eines Ausdrucks mehrheitlich nur so aufeinander, wie ihre erlernten Verfahren es vorgeben. Personen der Stufe 3 können hingegen neuartige Bezüge entdecken und daraus auf korrekte Umformungen schließen. Sie strukturieren um.

Auf der Ebene der Verfahren zeigt sich der Unterschied zwischen Personen der Stufe 2 und 3 vor allem darin, dass erst auf der Stufe 3 die Personen die Verfahren evaluieren. Typischerweise ist gerade das Verwerfen eines Verfahrens Anlass für sie, den Ausdruck umzustrukturieren.

Damit ist die Stoßrichtung der zu entwickelnden Aufgabenformate gegeben: Sie müssen zum Umstrukturieren anregen. Im Folgenden werden zwei entsprechende Aufgabenformate vorgestellt und abschließend ist dargelegt, wie und wozu sie im Unterricht eingesetzt werden können.

7.1 Erstes Aufgabenformat: Mehrfaches Umformen

Das erste Aufgabenformat besteht darin, mehrmals zum Lösen derselben Aufgabe aufzufordern. Dieses Aufgabenformat ist nicht neu, wird aber in Lehrmitteln teilweise nur spärlich bis gar nicht verwendet. So findet sich beispielsweise im Algebralehrmittel von Deller, Gebauer und Zinn (2012), das in der Deutschschweiz für die gymnasialen Klassen der Jahrgangsstufe 8 und 9 am meisten verwendet wird, keine einzige Aufgabe, die explizit dazu auffordert, bestimmte Gleichungen mehrmals, aber unterschiedlich aufzulösen.

Die produktive Wirkung dieses Aufgabenformats für die Förderung der Flexibilität ist empirisch belegt. So zeigen Star und Seifert (2006), wie Probanden, die während der Intervention dieselbe lineare Gleichung zweimal auf unterschiedliche Weisen bearbeiten mussten, danach lineare Gleichungen flexibler lösten als solche Probanden, die lineare Gleichungen nur einmal bearbeiten mussten. Über ein ähnliches Resultat ist in Star und Rittle-Johnson (2007) berichtet.

Eine eigene Studie (Rüede, 2012a) ging der Frage nach, inwiefern Personen durch mehrmaliges Lösen derselben Gleichung selbständig von Standardverfahren abrücken und neue, angemessenere Umformungen entdecken. Der Test bediente sich der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$. Es nahmen insgesamt 33 Lehramtsstudierende der Vorschule und Unterstufe des ersten Semesters freiwillig am Test teil. Sie mussten die Gleichung dreimal und zwar direkt hintereinander – ohne jegliche Intervention dazwischen – lösen und jedes Mal anders. Beim ersten Mal folgten über zwei Drittel der Studierenden dem Standardverfahren. Sie multiplizierten aus, fassten zusammen und isolierten x. Nur etwa 5 Prozent der Studierenden formten zu $10(16 + 3x) = 100$. Doch beim zweiten Mal formten schon etwa 10 Prozent so um und beim dritten Mal etwa 30 Prozent. Insgesamt entdeckten knapp die Hälfte der Studierenden die Umformung zu $10(16+3x)$. Offenbar evozierte dieses Aufgabenformat bei Studierenden einen Perspektivenwechsel. Insgesamt lässt sich mit diesem Resultat und den Studien aus der Literatur die Hypothese begründen, dass durch mehrmaliges Lösen derselben Aufgabe ein Umstrukturieren hervorgerufen wird.

Allerdings scheint dieses selbständige Umstrukturieren zumindest von der Jahrgangsstufe der Probanden abzuhängen. In einer eigenen Pilotstudie sind 60 Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II schriftlich befragt worden. Sie besuchten die Fachmittelschule, waren in der neunten Jahrgangsstufe und werden später überwiegend das Lehramt für die Vorschule und Unterstufe ablegen. Es handelte sich somit um Probanden, die mit jenen der obigen Studie vier Jahre später zu vergleichen sind. Das Resultat war eindrücklich. Von den gut 60 Schülerinnen und Schülern zeigte nur eine Probandin ansatzweise eine Umformung der Gleichung $7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x)$ zu $10(16 + 3x) = 100$. Alle anderen führten dreimal das Standardverfahren aus, indem sie dies variierten, etwa durch eine leicht andere Reihenfolge beim Ausmultiplizieren oder Zusammenfassen.

Dieses Resultat war zu erwarten. Denn aus der Grundschuldidaktik ist ein ähnliches Ergebnis bekannt. Offenbar entdecken Grundschulkinder neue Strategien umso eher, je älter und je leistungsfähiger sie sind. Das haben Torbeyns et al. (2009) gezeigt, indem sie Grundschulkinder in Interviews zum mehrmaligen, aber andersartigen Ausrechnen arithmetischer Terme aufforderten.

7.2 Zweites Aufgabenformat: Relationales Denken

Das zweite Aufgabenformat knüpft am *relationalen Denken* (relational thinking) von Carpenter, Franke und Levi (2003) an – vergleiche auch Stephens (2006, 2008). Dieses Konzept ist vor allem in der Grundschuldidaktik verbreitet, vorwiegend in den Vereinigten Staaten. Das Ziel ist, dass die Kinder das Gleichheitszeichen nicht als Befehl wie „Mach!" verstehen lernen, sondern als „ist dasselbe wie", das heißt, als Äquivalenz respektive als Relation. Daher der Name „relationales Denken". Zur Erreichung dieses Ziels fokussieren obige Autoren auf zwei zentrale Aufgabenformate.

Ein Beispiel für das erste Aufgabenformat ist $67+83 = \square+82$. Hier müssen die Kinder die Zahl im Kästchen herausfinden. Das kann operational gelöst werden, etwa indem 67 zu 83 addiert und vom Resultat 82 abgezogen wird. Wer hingegen relational denken kann, stellt zwischen 83 und 82 einen Bezug her, nämlich über die Konstanz der Summe beim ungleichsinnigen Verändern zweier Summanden. Ein Beispiel für das zweite Aufgabenformat ist $247 - 178 = 1 + 246 - 178$. Hier müssen die Kinder argumentieren, ob diese Gleichung wahr oder falsch ist. Wiederum kann entweder die linke und rechte Seite unabhängig voneinander ausgerechnet und miteinander verglichen oder relational gedacht werden. In diesem Fall würde das Kind 247 auf $1 + 246$ sowie die beiden 178 aufeinander beziehen und die linke wie auch die rechte Seite als Subtraktion behandeln, die im Prinzip die gleiche ist.

Auf diese Weise lernen die Kinder, umzustrukturieren. Zu Beginn neigen die Kinder beispielsweise dazu, bei $67 + 83 = \square + 82$ die beiden Zahlen 67 und 83 so aufeinander zu beziehen, dass sie die Addition ausführen können. Mit der Zeit werden sie aber 67 und 83 so aufeinander beziehen, dass sie 67 und 83 als Teile eines Ganzen behandeln und diese Teile als ungleichsinnig variierbar begreifen. Bezüge zwischen 83 und 82 sowie 67 und dem Kästchen $\square$ werden dann wichtig. Diese Umstrukturierung führt von der Behandlung von $67 + 83$ als Prozess hin zur Behandlung von $67 + 83$ als Objekt.

In Rüede (2012a, 2012b) wird nun so argumentiert, dass diese beiden Aufgabenformate auf die Algebra übertragen werden können. Das Ziel soll entsprechend sein, so umzustrukturieren, dass Terme nicht mehr als Verfahren, sondern als Objekte behandelt werden. Im Fall der linearen Gleichungen bieten sich beispielsweise folgende Gleichungen an:

$$\begin{aligned} 131x + 133x + 135x &= 132x + 132x + \square \\ 17x \cdot 3 - \square \cdot 3x &= 119 \cdot 2x - 2 \cdot 119x \end{aligned}$$

Die Anweisung für die Aufgaben lautet dann: Welcher Ausdruck in der Leerstelle macht die Seiten links und rechts des Gleichheitszeichens äquivalent?

Weitere Beispiele sind in Rüede (2012b) gegeben. Dort ist auch dokumentiert, wie solche Aufgaben tatsächlich Prozesse des Umstrukturierens auslösen.

Das zweite Aufgabenformat von Carpenter, Franke und Levi (2003) lässt sich ebenso in den algebraischen Kontext übertragen wie das erste. Im Themenbereich der linearen Gleichungen sind beispielsweise die folgenden zwei Gleichungen vorstellbar:

$$\begin{aligned} 247x - 178x &= x + 246x - 179x \\ 65(12x - 7) &= 13(60x - 35) \end{aligned}$$

Die Anweisung für diese Aufgaben lautet: Ist die linke Seite äquivalent zur rechten Seite? Verlangt werden Argumentationen und keine bloßen Ja/Nein-Antworten.

Solche Aufgaben haben hohes diagnostisches Potential. Weil dieses aber schon in Rüede (2012b) an Beispielen illustriert ist, wird in dieser Arbeit mehr auf den Einsatz dieser Aufgabenformate im alltäglichen Unterricht fokussiert. Das wird Gegenstand des folgenden Abschnitts sein.

Vorher sei aber noch darauf hingewiesen, dass der Begriff des relationalen Denkens in der Mathematikdidaktik erstens breit verwendet und zweitens mancherorts verallgemeinert wird. Es handelt sich also um ein äußerst brauchbares Konzept. Beispielsweise machen Mason, Stephens und Watson (2009) eine Begriffserweiterung. Für diese Autoren ist das relationale Denken im Sinne von Carpenter, Franke und Levi (2003) ein Spezialfall des *strukturalen Denkens* (structural thinking). Dabei meint strukturales Denken ein Explizieren, Gebrauchen und Miteinanderverbinden von Eigenschaften von mathematischen Objekten. Das so konzipierte strukturale Denken ist – nach Mason, Stephens und Watson (2009) – gleich dem *relationalen Verstehen* (relational understanding) von Skemp (1978).

7.3 Die Aufgabenformate als Gesprächsanlass

Selbstverständlich erwerben sich Schülerinnen und Schüler eine Expertise im algebraischen Strukturieren nicht einfach dadurch, dass im Unterricht obige Aufgabenformate zur Verfügung gestellt werden. Es kommt darauf an, wie die Lehrperson und die Klasse mit diesen Aufgabenformaten umgehen. Die Behauptung ist lediglich, dass anhand obiger Aufgabenformate die Schülerinnen und Schüler erstens in natürlicher und selbstverständlicher Weise produktive Erfahrungen im Strukturieren machen, auf die sie sich beim Erlernen von angemessenen algebraischen Strukturierungen abstützen können. Zweitens wird durch solche Aufgabenformate den Lehrpersonen wie auch den Schülerinnen und Schüler klar, dass Strukturieren ebenso ein Unterrichtsthema wie etwa das Lösen quadratischer Gleichungen ist.

Es ist nicht die Idee, im Unterricht Päckchen von Aufgaben, wie in den Abschnitten 7.1 und 7.2 vorgestellt, abzuarbeiten, sondern zwei, drei derartige Aufgaben pro Woche im Algebraunterricht zur Verfügung zu stellen. Sie sollen jeweils als Gesprächsanlass genutzt werden, um die eigenen Strukturierungen explizit zu machen, sie mit jenen der Mitschülerinnen und -schüler zu vergleichen und so die angemessenen Strukturierungen den unangemessenen gegenüberzustellen. Bei solchen Unterrichtsgesprächen realisieren die Schülerinnen und Schüler, dass algebraische Ausdrücke nicht (nur) als Einladung zur Ausführung von erlernten Verfahren zu verstehen sind, sondern interpretiert werden können, indem Bezüge zwischen Teilen so zu bilden sind, dass sie zu korrekten Umformungen führen. Es ist für Lernende äußerst hilfreich, exemplarisch zu erfahren, welche Bezüge andere herstellen und wie sie diese nutzen. Wie ein algebraischer Ausdruck angemessen behandelt werden kann, muss schließlich ausgehandelt werden. Aufgrund eines solchen Diskurses entwickelt die Klasse auf natürliche Weise das Bedürfnis für ein geeignetes Vokabular. Sie erkennt den Wert eines Fachvokabulars zur Beschreibung von eigenen und fremden Strukturierungen. Die Fachsprache wird wichtig. Fachbegriffe wie Teilterm, Differenz, Summe, Proportion spielen dann eine Rolle.

Erst eine gemeinsame Fachsprache (Hoch & Dreyfus, 2010; Kirshner & Awtry, 2004) ermöglicht ein gegenseitiges Verstehen. Denn Schülerinnen, Schüler und Lehrpersonen können Zusammenhänge zwischen ihren unterschiedlichen Behandlungen eines algebraischen Ausdrucks nur diskursiv herstellen. Die Fachsprache ist Mittel zum Explizieren der Strukturierungen. Einerseits müssen sich die Lehrpersonen Klarheit darüber verschaffen, welche Strukturierungen in ihrer Klasse produziert werden. Dazu kann die Lehrperson zum Beispiel ein Klassengespräch nutzen, im Rahmen einer individuellen Beratung entsprechende Fragen stellen oder auch Lernjournale (Ruf & Gallin, 1998) gezielt einsetzen. Andererseits können Lehrpersonen die Wahrnehmungen in ihrer Klasse mithilfe der Sprache lenken. Die dazu notwendigen präzisen Formulierungen sind nur im Rahmen einer gemeinsamen Fachsprache sinnvoll.

Die Fachsprache ermöglicht also einerseits die Kommunikation über die jeweiligen Strukturierungen. Andererseits erleichtert sie das Begründen respektive Argumentieren. Denn neben Bezeichnungen wie Differenz und Summe sind auch Begriffe wie Kommutativität, Distributivität, Äquivalenz etc. wichtig. Gerade Carpenter, Franke und Levi (2003) stellen den Aspekt des Begründens ins Zentrum des Unterrichts. Für sie ist eine Gleichung wie $12 \cdot 14 = 6 \cdot 28$ Anlass, um im Unterricht zu begründen, ob diese Gleichung wahr oder falsch ist. Molina und Mason (2009) legen sogar empirische Argumente zur Stützung der Hypothese vor, dass durch die Aufforderung zum Begründen die Lernenden vermehrt relational denken und daher die algebraischen Ausdrücke anders anschauen wagen.

Im Folgenden seien ein paar Beispiele gegeben. Sie illustrieren Bearbeitungen von Aufgaben wie in den Abschnitten 7.1 und 7.2 vorgestellt. Zwei Aspekte stehen dabei im Fokus. Erstens kann das Strukturieren in schriftlichen Dokumenten zumindest teilweise sichtbar gemacht werden. Die entsprechenden Dokumente belegen empirisch, dass Strukturieren tatsächlich ein Handeln ist, wie in Abschnitt 2.2 vorausgesetzt. Zweitens sind Umstrukturierungen problemlos evozierbar und die Personen, die gerade strukturieren, entdecken andere Strukturierungen oftmals selbständig.

Die unten vorgestellten Dokumente entstanden während einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung in Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz. Die Veranstaltung richtete sich an Lehramtsstudierende der Vorschule und Unterstufe im zweiten Semester. Der fachliche Schwerpunkt lag auf der Hinführung zur Expertise im Strukturieren von algebraischen (inklusive arithmetischen) Ausdrücken. Dazu wurden immer wieder die beiden obigen Aufgabenformate eingesetzt. Entscheidend war, dass die Bearbeitungen der Studierenden wesentlich für die Gestaltung der einzelnen Veranstaltungen genutzt wurden, wie im Dialogischen Lernen vorgesehen (Ruf & Gallin, 1998).

7.3.1 Strukturierungen sichtbar machen

Ein wichtiger Punkt in der Veranstaltung war, dass den Studierenden Instrumente für das Explizieren ihrer Strukturierungen in die Hand gegeben wurden, denn man wollte im Verlauf der Veranstaltung auf solche Strukturierungen hinweisen und darüber sprechen. Das setzte voraus, dass in den Aufgabenbearbeitungen der Studierenden solche Strukturierungen kenntlich gemacht waren.

Das bereitete den Studierenden anfänglich Schwierigkeiten, denn die meisten von ihnen behandelten Terme und Gleichungen zu Beginn des Studiums als Verfahren. Sie mussten einerseits zum Anschauen, zur Begegnung mit der „‚kontemplativen' Seite der Mathematik" (Fischer, 1984, S. 31), aufgefordert werden und andererseits zum Sprechen darüber. Allerdings wollte man den Studierenden entsprechende Instrumente nicht einfach präsentieren. Vielmehr war beabsichtigt, an ihrem Wissen und Können anzuknüpfen. So wurden geeignete Instrumente des Explizierens von Strukturierungen anhand ihrer Bearbeitungen einer Aufgabe thematisiert. Diese bestand im Finden der Leerstelle so, dass die Gleichung $66(x-2)^2 - \square = 67(x-2)^2 - 39(x-2)^2$ allgemeingültig wird, ein Beispiel für das erste Aufgabenformat. Man schaute in den Aufgabenbearbeitungen der Studierenden nach den verwendeten Instrumenten. Typischerweise waren sich die Studierenden gar nicht darüber bewusst, mit welchen Instrumenten sie ihre Strukturierungen explizit machten. Es musste ihnen aufgezeigt werden, was sie implizit (schon) nutzten.

Solche Beispiele, wie Mitstudierende ihr Strukturieren zum Ausdruck brachten, wurden in der Veranstaltung gezeigt und diskutiert. Anhand dieser Dokumente realisierten die Studierenden, welche Instrumente andere und welche sie selbst verwendeten, um die Strukturierungen explizit und daher dem Gespräch zugänglich machten. Im Folgenden sind einige dieser Instrumente vorgestellt.

Fachsprache

Ein paar Studierende verwendeten Fachbegriffe, ganz im Sinne von Hoch und Dreyfus (2010), Kirshner (2006) sowie Kirshner und Awtry (2004). Damit drückten sie ihre Strukturierung aus. Beispielsweise spricht die Studierende in

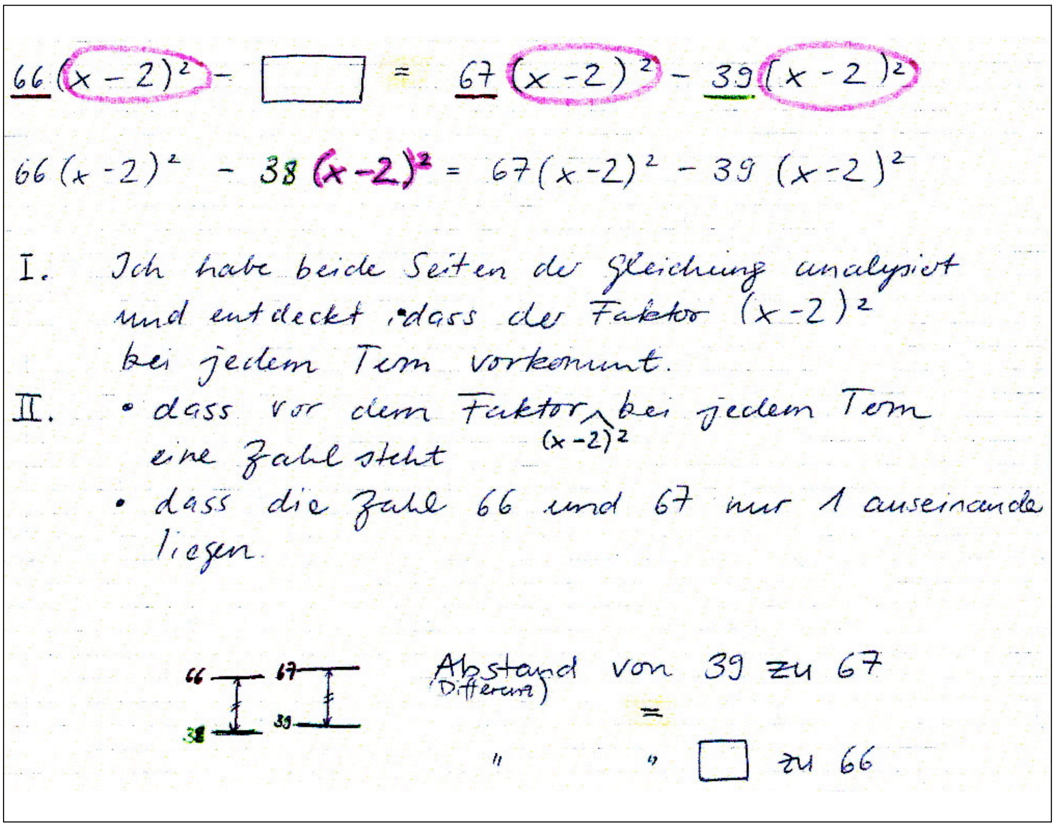

Abbildung 7.1: Die Strukturierung kann durch Gebrauch der Fachsprache („Faktor“, „Term“, „Gleichung“ und „Differenz“) explizit gemacht werden

Abbildung 7.1 von „Faktor“, „Term“, „Gleichung“ und „Differenz“. Das sind alles Bezeichnungen, die den Blick lenken. Besonders ihr Gebrauch des Begriffs der Differenz war sehr erhellend. Sie bezog die entsprechenden Vorfaktoren als Differenz aufeinander. Auch wenn sie dieses Wort nur ganz klein schrieb und in Klammern verwendete, brachte sie so zum Ausdruck, dass sie auf den Abstand respektive den Unterschied der jeweiligen Vorfaktoren zielte. So konnte sie deutlich machen, dass sie beispielsweise 67 nicht als isolierte Zahl behandelte, sondern als Teil einer Differenz, nämlich als Minuend. Sie gebrauchte

„Differenz“ zweier Zahlen als Synonym für „Abstand“ zweier Zahlen. Damit wird explizit, wie sie 67 und 39 aufeinander bezieht, analog die 66 und die □, und wie sie den Bezug von 66 auf 67 begreift. Nur vor diesem Hintergrund macht es fachlich Sinn, von 39 auf 38 zu schließen.

Eine andere Studierende sprach fachlich völlig korrekt von gleichsinniger Veränderung (Abbildung 7.2). Auch dieser Begriff bringt klar auf den Punkt, wie die jeweiligen Vorfaktoren aufeinander bezogen wurden. Durch die Ver-

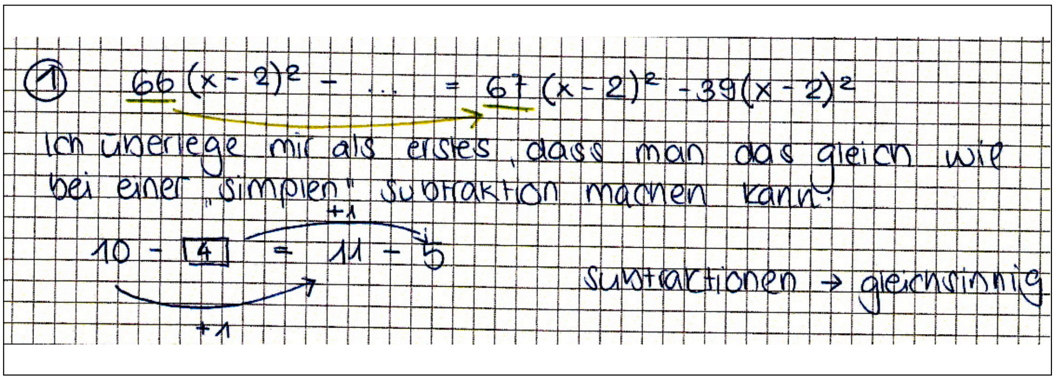

Abbildung 7.2: Die Strukturierung kann durch Gebrauch der Fachsprache („gleichsinnig“) explizit gemacht werden

wendung von „gleichsinnig“ macht die Studierende klar, dass sie zwischen 10 und 11 sowie 4 und 5 nicht einfach den Unterschied 1 sieht. Sie behandelt die linke Seite $10 - 4$ sowie die rechte Seite $11 - 5$ als Subtraktionen mit demselben Ergebnis, die auseinander hervorgehen, indem Minuend und Subtrahend gleichsinnig variiert werden. Das ist ihre Strukturierung.

Beide Beispiele zeigen, wie die Verwendung von Fachbegriffen hilft, Strukturierungen explizit zu machen. Darüber hinaus unterstützt die Verpflichtung zur Verwendung von Fachbegriffen die Studierenden, angemessen strukturieren zu lernen (Hoch & Dreyfus, 2010; Kirshner, 2006). Die Lernenden müssen die Teile so aufeinander beziehen, dass die Fachbegriffe anwendbar werden. Das gelingt ihnen nur dann, wenn sie entsprechende Strukturierungen vornehmen.

Pfeile

Um zu zeigen, was man aufeinander bezieht, eignet sich die Angabe von Pfeilen. Die Art des Bezugs kann durch geeignete Beschriftungen ausgedrückt werden, wie etwa Abbildung 7.3 zeigt. Solche Pfeile geben explizit an, welche Teile jemand aufeinander bezieht. In Abbildung 7.3 hat die Studierende die Pfeile beschriftet mit $+1$ und -1. Sie erkennt offenbar, dass sich die entsprechenden Vorfaktoren jeweils um Eins unterscheiden. Zudem gibt sie eine

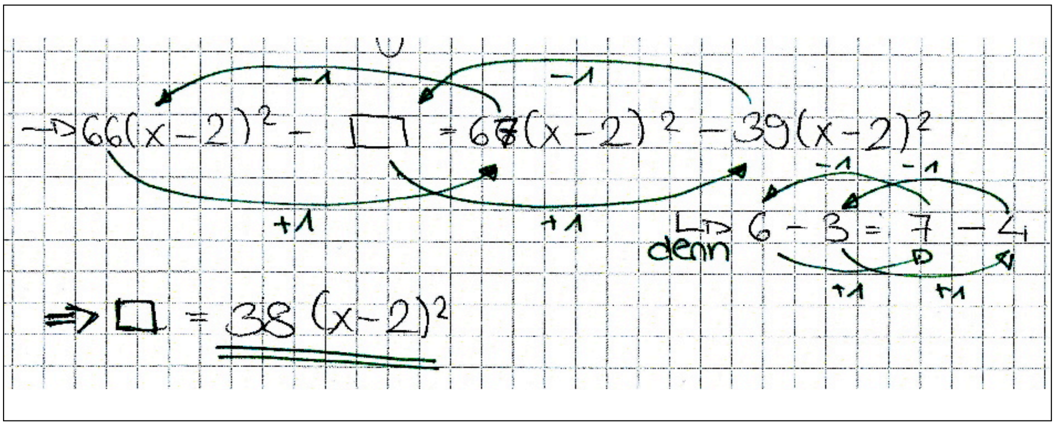

Abbildung 7.3: Die Strukturierung kann durch Gebrauch von Pfeilen explizit gemacht werden

Analogie an: $6-3=7-4$. Das macht deutlich, dass sie die Faktoren $(x-2)^2$ in ihrer Strukturierung von $66(x-2)^2 - \Box = 67(x-2)^2 - 39(x-2)^2$ als vernachlässigbar behandelt. Dadurch reduziert sie das Problem auf ein rein arithmetisches und kann an ihrem Vorwissen anknüpfen.

Färben

Um Gemeinsamkeiten auszuarbeiten, können Teile gefärbt werden. Vor allem in Verbindung mit anderen Instrumenten entwickelte dieses Instrument seine Produktivität. In Abbildung 7.4 macht die Studierende klar, dass allein das Markieren den Fokus ändern kann. Dieses Beispiel belegt eindrücklich, dass Strukturieren ein Prozess ist. Die Studierende musste die Klammern aufeinander beziehen, um zu erkennen, dass es die gleichen sind. Das Färben stellte diesen Bezug her. Als Konsequenz können die Klammerausdrücke vernachlässigt werden, wie die Studierende vermerkt. Das Färben ermöglichte ihr offenbar, jene Teile aufeinander zu beziehen, die nicht angefärbt waren. Die sich daraus ergebende Strukturierung machte sie durch die Verwendung von Pfeilen explizit.

Bündeln

Viele Studierende zögerten, mit einem zusammengesetzten Ausdruck zu handeln. Für diese konnte es erleichternd sein, wenn sie diesem einen Namen gaben. Diese Idee brachte eine Studierende als Substitution tatsächlich zum Ausdruck. Offenbar half das schlanke a beim Aufeinanderbeziehen der Vorfaktoren. Abbildung 7.5 belegt, dass zusammengesetzte Ausdrücke die Aufmerksamkeit der Studierenden stark auf sich ziehen. Es scheint ihnen nicht immer

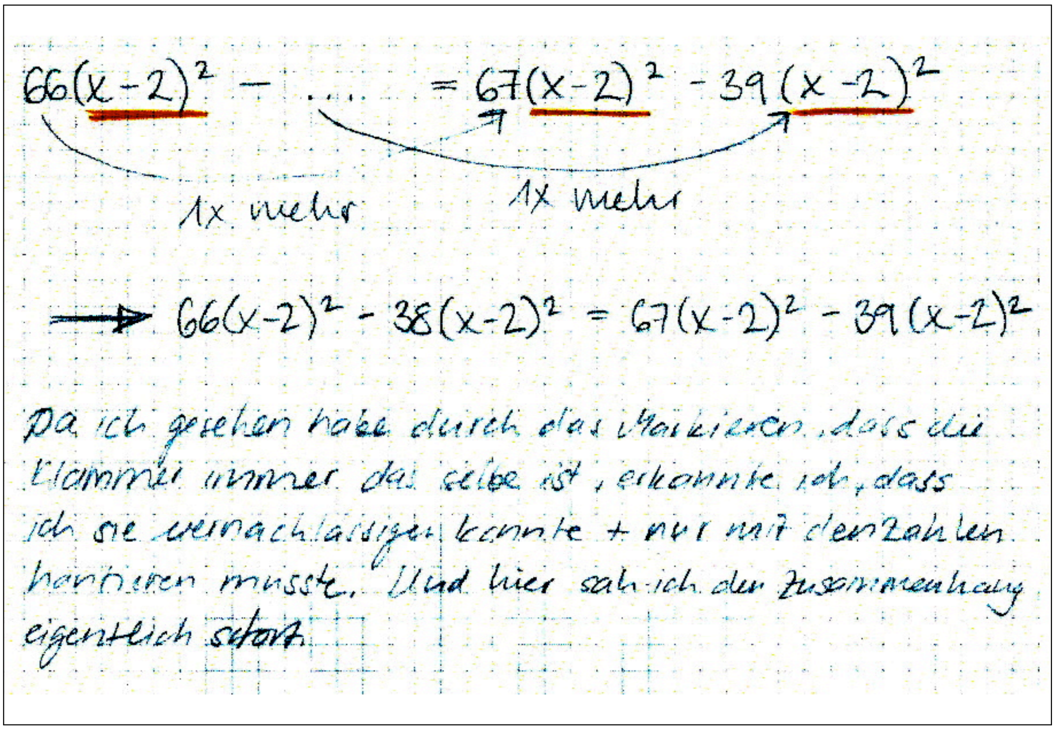

Abbildung 7.4: Die Strukturierung kann durch Färben explizit gemacht werden

möglich, diese mental als *ein* Etwas zu behandeln. Im Beispiel der Abbildung 7.5 musste die Studierende dem zusammengesetzten Ausdruck $(x-2)^2$ den Namen a geben, damit er nicht mehr so dominant im Blickfeld war. Erst so war das Aufeinanderbeziehen der Vorfaktoren erfolgreich. Erst so konnte sie von einem „Resultat sowohl auf der linken wie auch auf der rechten Seite“ sprechen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den zusammengesetzten Ausdruck zu umkreisen. Das gibt ihm den Anschein eines Bündels und hat denselben Effekt wie das Setzen von zusätzlichen Klammern, was zum Beispiel Kortenkamp (2005) ausarbeitete. In Abbildung 7.6 macht das Umkreisen deutlicher, dass links und rechts des Gleichheitszeichens je eine Differenz steht. (Manchmal hatte das Färben denselben Effekt.) Allgemein neigten die Studierenden eher zum Umkreisen als zum Substituieren. Das erstaunt nicht in Anbetracht der Schwierigkeiten, die mit dem Erlernen des Substituierens verbunden sind (Filloy, Rojano & Solares, 2008). Allerdings kann dieses Umkreisen als eine Art Vorstufe des Substituierens betrachtet werden.

Die Vorstellung solcher Instrumente bewirkte, dass sie von den Studierenden im Laufe der Veranstaltung rege eingesetzt wurden. Ein weiterer Effekt

Zuerst habe die ich die Gleichung betrachtet und nach gleichen Ausdrücken gesucht.

$$66\,(x-2)^2 - \square = 67\,(x-2)^2 - 39\,(x-2)^2$$

Dadurch wird mir klar, dass dieser Ausdruck auch im fehlenden Kasten vorkommen muss.

$$66\,(x-2)^2 - \square * (x-2)^2 = 67\,(x-2)^2 - 39\,(x-2)^2$$

Danach habe ich die Zahlen vor den gleichen Ausdrücken genauer betrachtet. Dazu ersetzte ich den Ausdruck $(x-2)^2$ mit der Variable a.

+1

$$66 * a - \square * a = 67 * a - 39 * a$$

+1

Ich bemerkte, dass der Minuend auf der linken Seite des Gleichheitszeichens 1 kleiner ist als der rechte. Damit nun das Resultat sowohl auf der linken wie auch auf der rechten Seite, das gleiche wird, muss linke Subtrahend ebenfalls 1 kleiner sein. Also 38.

$$66\,(x-2)^2 - 38\,(x-2)^2 = 67\,(x-2)^2 - 39\,(x-2)^2$$

Abbildung 7.5: Die Strukturierung kann durch Bündeln – hier Benennen mit einem Buchstaben – explizit gemacht werden

war die Zugänglichkeit der Bearbeitungen. Sowohl der Dozent als auch die Mitstudierenden profitierten von der Entwicklung und Verwendung solcher Instrumente zur Unterstützung des Strukturierens. Denn die Bearbeitungen wurden so wesentlich nachvollziehbarer. In diesem Sinne förderte die Sichtbarmachung der Strukturierungen die Kommunikation darüber.

7.3.2 Weg vom Schema F, hin zur Exploration

Viele Studienanfänger des Lehramts für die Vorschule und Unterstufe können der Stufe 2 des Strukturierens zugeordnet werden. Sie behandeln einen Term oder eine Gleichung als Befehl zur Ausführung eines Verfahrens. Die Aufgabe der Lehrveranstaltung bestand darin, sie im ersten Schritt zum Anschauen eines algebraischen Ausdrucks hinzuführen, zum Herstellen von Bezügen, die mathematische Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge sichtbar machen und zum Erzählen über mögliche Strukturierungen des Ausdrucks. Denn das Ziel war, dass die Lehramtsstudierenden einen algebraischen Ausdruck zwei Semester später als Objekt behandeln – und dann entsprechend mit arithmetischen

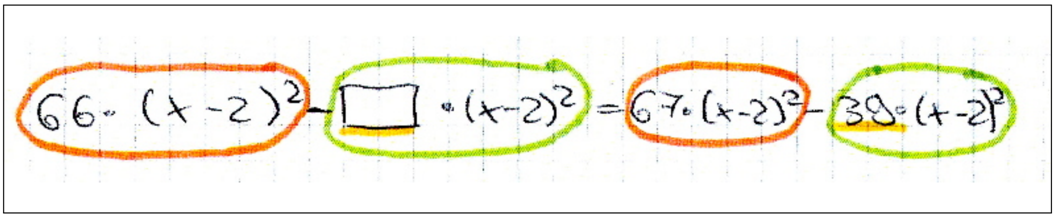

Abbildung 7.6: Die Strukturierung kann durch Einkreisen explizit gemacht werden

Ausdrücken umgehen können. Sie sollten dann insbesondere einen ausgebildeten Zahlenblick (Schütte, 2008) besitzen und flexibel rechnen (Rathgeb-Schnierer, 2006) können.

Zur Erreichung dieses Ziels setzte man das erste Aufgabenformat (Abschnitt 7.1) mehrmals in der Veranstaltung ein. In der Folge ist ein Auftrag vorgestellt, der am Anfang der Veranstaltung stand und stark auf diagnostische Aspekte setzte. Denn man wollte zuerst die vorhandenen Fähigkeiten im Strukturieren algebraischer Terme überblicken. Gegenstand des Auftrags war die Gleichung

$$7(16 + 3x) = 100 - 3(16 + 3x).$$

In einem ersten Teil mussten die Studierenden diese Gleichung dreimal hintereinander lösen, immer anders und ohne jegliche zwischenzeitlichen Interventionen. In einem zweiten Teil studierten sie zuerst einen vorgegebenen Lösungsweg. Dieser bestand in der Umformung zu $10(16 + 3x) = 100$. Die Studierenden sollten dann notieren, wie sie selbst auf diesen Lösungsweg gekommen sind, falls einer ihrer drei Lösungswege diesem entsprach. Im anderen Fall sollten sie schriftlich festhalten, warum sie diesen Lösungweg nicht entdeckt hatten. Diese Aufteilung in zwei Teile erwies sich als produktiv, denn so gewann man viel Information über die Betrachtungs- und Herangehensweisen der Studierenden.

In der Veranstaltung wurden einige dieser Bearbeitungen genutzt. Anhand ihrer zeigte man auf, wie andere Studierende auf die Umformung zu $10(16 + 3x) = 100$ geführt wurden – zum Teil erst nach mehreren misslungenen Versuchen. Erstens belegte das, dass auch fortgeschrittene Studierende (inklusive Experten) angemessene Umformungen nicht sofort entdecken, sondern oftmals erst nach mehrmaligem Scheitern. So erhoffte man sich in der Veranstaltung, dass die Studierenden in Zukunft nicht die Flinte ins Korn werfen, wenn sie nicht auf Anhieb Erfolg haben. Denn nach Threlfall (2002) müssen Lernende beharrlich sein können, damit sie sich ein flexibles Handeln angewöhnen. Zweitens wurde darauf hingewiesen, dass man den ganzen algebraischen Ausdruck – und nicht nur ein Merkmal oder einen Teil davon – im Fokus haben und die einzelnen Teile miteinander vergleichen soll. Im Folgenden sind zwei erhellende Bearbeitungen von Studierenden vorgestellt.

Gleichheit der Klammern übersehen

Eine Studierende multiplizierte die Gleichung $7(16+3x) = 100 - 3(16+3x)$ im ersten Versuch sofort aus zu $112+21x = 100-48-9x$, formte im zweiten Versuch um zu $7(16+3x)+3(16+3x) = 100$ und multiplizierte aus zu $112+21x+48+9x = 100$. Beim dritten Versuch schrieb sie dann: „Komischerweise ist mir erst jetzt aufgefallen, dass die beiden Klammern gleichen Inhalts sind. Ich sehe also, dass auf der einen Seite 7 mal die Klammer steht und auf der anderen Seite -3 mal die Klammer. Wenn ich die beiden Klammern also auf eine Seite bringe, habe ich 10 mal die Klammer.

$$\begin{aligned} 7 \cdot (16+3x) + 3(16+3x) &= 100 \\ 10(16+3x) &= 100 \end{aligned}$$

Jetzt muss ich nur noch ausmultiplizieren und nach x auflösen.“ Offenbar erkannte diese Studierende die Gleichheit der Klammern nicht auf Anhieb. Sie schien die Klammern erst im dritten Versuch aufeinander bezogen zu haben. Das war bei manch anderen Studierenden auch zu beobachten. Ihnen fiel die Klammer auf und daher bezogen sie sofort den Vorfaktor auf die Klammerinhalte. Sie multiplizierten aus, ohne die Gleichung genauer angeschaut zu haben. So erstaunlich dieses Übersehen der Gleichheit der Klammern ist, so oft wurde es angetroffen.

Obige Studierende hielt zudem fest: „Als mir noch nicht bewusst war, dass die Klammern gleich sind, dachte ich noch, ich könne die 7 und 3 aufgrund der ‚Punkt vor Strich‘-Regel nicht addieren.“ In diesem Satz kommt die Umstrukturierung, die die Studierende vollzog, zum Ausdruck. Zuerst bezog sie jeden Vorfaktor nur auf die jeweilige Klammer, behandelte die Punkt-vor-Strich-Regel also temporal (Abschnitt 5.2.3). Danach bezog sie die beiden Klammern aufeinander, entdeckte die Gleichheit und bezog dann die beiden Vorfaktoren aufeinander.

Die Subtraktion stört

Eine andere Studierende multiplizierte im ersten Versuch ebenfalls zuerst aus. Im zweiten Versuch dividierte sie auf beiden Seiten durch $(16+3x)$ und entdeckte erst im dritten Versuch die Möglichkeit der Umformung zu $10(16+3x) = 100$. Sie notierte: „Zuerst $+3(16+3x)$, so verschiebt es sich auf die andere Seite, was die ganze Gleichung schon mal freundlicher macht, da keine Subtraktion mehr verlangt wird, denn dies schreckt mehr Personen ab als eine normale Addition. Danach müssten jedoch auch zuerst Multiplikationen und dann die Additionen vorgenommen werden. Und so, die Gleichung weiter auflösen, das heißt, es wäre dann

$$7(16 + 3x) + 3(16 + 3x) = 100.$$

Nun kann man entweder ausmultiplizieren (jede Klammer für sich) oder man fasst sie zusammen zu $10(16 + 3x) = 100$ und multipliziert erst jetzt aus.“ Diese Passage zeigt, wie die Studierende die Umformung zu $10(16+3x) = 100$ entdeckte. Zuerst wollte sie nämlich einfach das Minuszeichen verschwinden lassen. Das belegt eine weitere Passage: „Zuerst wollte ich die Subtraktion beheben.“ Erst nachdem sie obigen Zwischenschritt aufgeschrieben hatte, bezog sie die beiden gleichen Klammern aufeinander und die entsprechenden Vorfaktoren. Als Konsequenz fasste sie $7(16 + 3x)$ und $3(16 + 3x)$ zu $10(16 + 3x)$ zusammen. Diese Reihenfolge machte sie an anderer Stelle sogar explizit: „Als ich mir die Gleichung dann aufschrieb und mir wieder bewusst wurde, dass die Klammern ja identisch sind, sah ich, dass man diese gut zusammenfassen kann.“

Fazit

Obige Beispiele illustrieren zwei typische Gründe, die zur Entdeckung der intendierten Umformung führten. Andere Gründe waren beispielsweise, dass die gleichen Klammern einen Trick nahelegten oder dass man die Variablen auf eine Seite bringen wollte und dabei dann die Umformung zu $10(16+3x) = 100$ entdeckte.

Für die Veranstaltung war die Präsentation und Diskussion solch gelungener Denkwege äußerst produktiv. Denn die Studierenden realisierten, dass Strukturieren einen forschenden Charakter besitzt. Man muss unterschiedliche Bezüge ausprobieren und deren Konsequenzen erkennen und evaluieren. Aufgrund dieser Erkenntnis wagten die Studierenden vermehrt, Terme und Gleichungen anders als gewohnt zu strukturieren. Das führte dazu, dass im Laufe der Veranstaltung nicht mehr mithilfe des ersten Aufgabenformats explizit zum Umstrukturieren aufgefordert werden musste, sondern man konnte vermehrt die Studierenden einfach unvertrauten Situationen aussetzten. Sie probierten dann selbständig mehrere Strukturierungen aus. Mit einer „unvertrauten Situation“ ist ein zu vereinfachender Term oder eine zu lösende Gleichung gemeint, die zu Standardverfahren verführt, jedoch am einfachsten mit einem Trick gelöst werden kann. Einige Beispiele sind:

$$\begin{aligned} (4x-2)^2 &= 0.04, \\ (2x+1)^3+4 &= 31, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(x+1)^3 + (x+1)^3 &= 81, \\ \frac{8x+8}{x+1} + \frac{x(x-10)}{x} &= \frac{3x+6}{x+2}. \end{aligned}$$

In der Tat lösten solche Beispiele bei den Studierenden Umstrukturierungen aus, die dann wiederum in der Veranstaltung vorgestellt wurden und zu weiteren Aufträgen Anlass gaben. Damit wird bestätigt, was in anderen Kontexten ebenso beobachtet wurde: Herausforderungen respektive Hindernisse bieten Möglichkeiten zu lernen (Drijvers, 2002).

Zur Vermeidung von Missverständnissen soll am Schluss betont werden, dass den Studierenden zu etwa zwei Dritteln Beispiele vorgelegt wurden, die auf die Anwendung von Standardverfahren zielten. Nur der restliche Drittel bestand aus unvertrauten Situationen.

7.4 Zusammenfassung der Resultate

Als eine Konsequenz des Stufenmodells des Strukturierens bietet sich die Konstruktion geeigneter Aufgaben zur Förderung des Strukturierens an. Vor allem der Übergang von Stufe 2 zur Stufe 3 erweist sich in der Praxis als problematisch. Diese beiden Stufen unterscheiden sich darin, dass Personen auf der Stufe 3 umstrukturieren können, jene auf der Stufe 2 hingegen nicht. Daher bieten sich zur Förderung des Übergangs von Stufe 2 hin zur Stufe 3 Aufgabenformate an, die das Umstrukturieren evozieren. Sowohl mehrfaches Umformen (erstes Aufgabenformat, Abschnitt 7.1) als auch relationales Denken (zweites Aufgabenformat, Abschnitt 7.2) scheinen diese Anforderung zu erfüllen.

Die beiden Aufgabenformate ermöglichen es, das Strukturieren von Termen und Gleichungen im Unterricht zum Thema zu machen. Dabei ist entscheidend, wie mit diesen Aufgabenformaten umgegangen wird. Die Entwicklung des Strukturierens scheint wesentlich unterstützt zu werden, wenn sich Lehrende und Lernende über ihre eigenen Strukturierungen austauschen. Insbesondere können die Bearbeitungen der Aufgabenformate genutzt werden, um die Strukturierungen explizit zu machen, sie zu vergleichen und über ihre Angemessenheit zu diskutieren (Abschnitt 7.3). Dieser kommunikative Austausch scheint zwei Effekte zur Folge zu haben:

- Um sich über die eigenen und fremden Strukturierungen austauschen zu können, müssen die Lernenden ihre eigenen Strukturierungen explizit machen. Daher beschreiben sie ihre Strukturierungen beispielsweise in Worten, visualisieren ihre Bezüge mit Pfeilen, Färbungen, Einkreisungen oder nutzen Substitutionen zur Verdeutlichung.

- Durch den Austausch der Bearbeitungen realisieren die weniger fortgeschrittenen Lernenden, dass auch Lernende mit hoher Expertise mehrere Versuche anstellen, um eine Aufgabe erfolgreich zu lösen. Daher packen dann auch die weniger fortgeschrittenen Lernenden einen algebraischen Ausdruck unter Umständen mehrmals an. Auch sie beginnen zu explorieren und machen erste Umstrukturierungen.

8 Diskussion

Abschließend werden alle Resultate der vorgelegten Arbeit zusammengefasst und diskutiert. Ausgehend von den in Abschnitt 1.1.1 formulierten Forschungsfragen wird geschaut, inwiefern sie nun beantwortet sind. Was wurde erreicht? Was muss überdacht werden? Was bleibt offen?

8.1 Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist das Erkennen von algebraischen Umformungen. Wie behandelt eine Person die einzelnen Zeichen in einem algebraischen Ausdruck, um auf eine Umformung schließen zu können? Das ist die zentrale Fragestellung. Sie fokussiert sowohl auf das Erkennen einer Umformung als auch auf die Individualität dieses Erkennens. Die Fragestellung ist im Detail vierteilig (vgl. Abschnitt 1.1.1) und erfordert die Bearbeitung der folgenden Aspekte:

1. Theoretische Fundierung und Bestimmung des Begriffs der Strukturierung

2. Spezifikation der Methode zur empirischen Erfassung von Strukturierungen

3. Empirisch basierte Bildung von Kategorien von Strukturierungen

4. Aufstellung eines Modells der Entwicklung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke

8.1.1 Theoretische Resultate

Diese Arbeit stellt das individuelle Strukturieren von Termen und Gleichungen ins Zentrum. Unter dem „individuellen Strukturieren“ wird die Art und Weise verstanden, wie eine Person einen algebraischen Ausdruck wahrnimmt respektive behandelt, um Umformungen zu erkennen. Mit diesem Ansatz rücken der materiell gegebene Ausdruck, seine einzelnen Zeichen und die Art und Weise, wie eine Person mit ihnen hantiert, in den Fokus. Aus diesem Grund knüpft die Arbeit an semiotisch-pragmatischen Ansätzen an wie dem Inferentialismus von Brandom (2000), der Onto-Semiotik von Font, Godino und Gallardo

(2013) oder dem sozio-kulturellen Ansatz von Radford (2003). Solchen Ansätzen ist gemein, dass sich die Bedeutung von Zeichen darin zeigt, wie Personen mit ihnen umgehen. Beim Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks werden diese Umgangsweisen mit Zeichen als ein Aufeinanderbeziehen der vorkommenden Zeichen verstanden, so die Festlegung der vorgelegten Arbeit: Strukturieren ist ein Herstellen von Bezügen zwischen Teilens des Ausdrucks, eine Strukturierung ist das Produkt des Strukturierens. Und die Bedeutung, die eine Person einer bestimmten Strukturierung des Ausdrucks zuweist, besteht in ihrem praktischen Wissen, wann sie die Teile des Ausdrucks so aufeinander beziehen würde und welche Konsequenzen sie daraus zöge. Das ist die personale Bedeutung dieser Strukturierung (Abschnitt 2.3.3) und das ist ein „Wissen, wie".

Jener Teil des „Wissen, wie", der inferentiell gegliedert ist, wird als implizites Wissen bezeichnet, das heißt, das implizite Wissen einer Person besteht aus der Menge der Inferenzen, die sie vollziehen kann. Diese Inferenzen können sogar als Konditionale explizit gemacht werden. Das geschieht etwa dann, wenn eine Person darüber spricht, aus welchen Gründen sie eine bestimmte Strukturierung herstellt und worauf sie daraus schließt. Für das Strukturieren scheinen zwei Typen solcher Inferenzen wichtig zu sein: transformationale und konversionale (Abschnitt 6.3.3). Transformationale Inferenzen führen von der Strukturierung zum umgeformten Ausdruck, zum weiter umgeformten Ausdruck etc. Konversionale Inferenzen bestehen aus dem Vergleich sowohl von unterschiedlichen Strukturierungen des vorgelegten Ausdrucks als auch von den sich daraus ergebenen unterschiedlich umgeformten Ausdrücken – ausgehend vom vorgelegten Ausdruck.

Obige Ausführungen geben erstens Antwort auf den ersten Teil der Forschungsfrage und bilden zweitens die begriffliche Basis für die Antwort auf ihren vierten Teil, also auf die Frage nach der theoretischen Konzeption eines Modells, wie sich das Strukturieren entwickelt. Denn es handelt sich dabei um die Entwicklung des impliziten Wissens über Strukturierungen, insbesondere um die Entwicklung seiner transformationalen und konversionalen inferentiellen Gliederung (Abschnitt 6.3.5). Es wird die Hypothese aufgestellt, dass die Ausbildung der transformationalen Inferenzen aus einer Strukturierung jener der konversionalen zwischen Strukturierungen vorausgeht. Im Detail: Solange die Person weder transformationale noch konversionale Inferenzen ziehen kann, behandelt sie den Ausdruck als anschauliches Ding (Stufe 1). Der Aufbau der inferentiellen Gliederung beginnt erst mit der Ausbildung von transformationalen Inferenzen. Die Person behandelt den Ausdruck dann als Verfahren, vielleicht sogar als verschiedene Verfahren (Stufe 2). In diesem Sinne bildet sie verschiedene, voneinander unabhängige transformationale „Sequenzen" aus. Die Person weiß implizit über die Konsequenzen Bescheid, die eine Strukturierung zur Folge hat. Sie verbindet aber die Konsequenzen unterschiedlicher Verfahren noch nicht. Unterschiedliche Strukturierungen des gleichen Ausdrucks behandelt sie als unabhängig voneinander. Erst im Laufe der Entwicklung vermag die Person die einzelnen transformationalen Sequenzen miteinander zu verbinden: Die Person stellt konversionale Inferenzen her, vorerst zwischen den Konsequenzen unterschiedlicher transformationaler Sequenzen und später auch zwischen den dazugehörigen Strukturierungen (Stufe 3). Sie strukturiert um. Entscheidend ist hier, dass die Person einen algebraischen Ausdruck von innen nach außen oder von außen nach innen umstrukturieren kann. Welche Richtung die Person bevorzugt, hängt vermutlich sowohl von ihrer Lernbiografie als auch vom gegebenen Ausdruck ab. Wer Ausdrücke vorwiegend auswertete, könnte zu Umstrukturierungen von innen nach außen tendieren. Wer vorwiegend Standardverfahren ausführte, neigt beim Umstrukturieren vielleicht zur umgekehrten Richtung. Auf jeden Fall ist zentral, dass auf der Stufe 3 die einzelnen Strukturierungen eines Ausdrucks durch konversionale Inferenzen miteinander verbunden werden. Sobald das implizite Wissen einer Person sowohl inferentiell als auch konversional gegliedert ist, behandelt sie den Ausdruck als Objekt (Stufe 4).

8.1.2 Empirische Resultate

Das im obigen Abschnitt nochmals zusammenfassend dargestellte Modell der Entwicklung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke verallgemeinert die in den Kapiteln 4 und 5 beschriebenen empirischen Resultate. Dort sind vier Kategorien des Strukturierens identifiziert: Den Ausdruck optisch einfacher machen, ihn ändern, ihn umstrukturieren oder seine Klassifizierung erforschen. Damit ist der dritte Teil der Forschungsfrage beantwortet. Die Kategorien sind in Abschnitt 6.1.2 zusammengefasst und in Abschnitt 6.2 ausgiebig diskutiert.

Ebenso ist in Abschnitt 6.1.2 das zweite Hauptresultat, der Vergleich zwischen den Experten und den Novizen, im Überblick dargestellt. Offenbar strukturiert sowohl jeder Experte als auch jeder Novize einzigartig (Abschnitt 4.2.7). Als Unterschied zwischen den hergestellten Strukturierungen ist hervorzuheben: Die Experten setzen die Strukturierungen zur Exploration des algebraischen Ausdrucks ein. Sie diskutieren den Ausdruck. Die Novizen stellen hingegen Strukturierungen (nur) dazu her, um ein Standardverfahren ausführen respektive die gestellte Aufgabe lösen zu können (Abschnitt 4.2.8).

Dieser Unterschied zwischen den Novizen und den Experten lässt sich auch so beschreiben, dass die inferentielle Gliederung des „Wissen, wie" bei den Novizen vorwiegend transformational ist (wenn überhaupt) und bei den Experten transformational *und* konversional. Salopp gesprochen, sind die Novizen der Stufe 3 gerade im Übergang zwischen diesen beiden Extremen. Aus diesem Grund fokussieren die in Kapitel 7 vorgestellten Förderideen auf die Hinführung von der Stufe 2 zur Stufe 3. Welche Aufgabenformate regen zum

Umstrukturieren an? Wie soll mit ihnen umgegangen werden?

Vorgeschlagen sind zwei Aufgabenformate: Erstens das mehrmalige Lösen derselben Aufgabe (Abschnitt 7.1) und zweitens Ausdrücke, die ein relationales Denken begrüßen (Abschnitt 7.2). Beide Aufgabenformate motivieren Lernende, ihre eigenen Strukturierungen explizit zu machen, sie mit jenen von anderen Personen zu vergleichen und schließlich über deren Angemessenheit zu diskutieren. So wird der Fokus auf die Wahrnehmung gelenkt und die Leitfrage der vorgelegten Arbeit wird zur Leitfrage der Lernenden: *Wie* erkenne ich Umformungen? Dieser Lernprozess wird wesentlich dadurch ermöglicht, dass Lehrende und Lernende sich über die Bearbeitungen der entsprechenden Aufgaben austauschen (Abschnitt 7.3).

8.2 Vergleich mit anderen Studien

In diesem Abschnitt werden die zentralen Resultate dieser Arbeit auf die aktuelle mathematikdidaktische Diskussion bezogen. Ziel ist es, die Erkenntnisse der Arbeit deutlicher und deren Relevanz kenntlicher zu machen.

8.2.1 Der semiotisch-pragmatische Ansatz

Die Fundierung dieser Arbeit in semiotisch-pragmatischen Ansätzen geht einher mit der Fokussierung auf den Gebrauch der algebraischen Zeichen. Dieser Gebrauch ist hier beim Strukturieren als Herstellen von Bezügen zwischen Teilen des gegebenen algebraischen Ausdrucks definiert. Entsprechend fallen die empirischen Resultate aus. Sie beschreiben die Art und Weise, wie Personen die Zeichen in einem algebraischen Ausdruck aufeinander beziehen.

Beispielsweise behandeln manche Anfänger ein Minuszeichen vor einem Klammerausdruck als Vorzeichen, auch wenn es als Operationszeichen intendiert ist (Abschnitt 5.2.4). Oder andere behandeln gemischte Ausdrücke, wo sowohl Plus- als auch Multiplikationszeichen vorkommen, tendenziell als Vorschrift, zuerst auszumultiplizieren, bevor etwas anderes gemacht wird. Sie begreifen „Punkt vor Strich“ temporal (Abschnitt 5.2.3). Diese Beispiele illustrieren, wie die vorgelegte Arbeit den Gebrauch der Zeichen beim Strukturieren beschreibt. Sie interessiert sich für die hergestellten Bezüge, indem sie die Phänomenologie des Wahrnehmens ins Zentrum stellt. So gelingt die Erfassung der personalen Bedeutung einer Strukturierung: Welche Bedeutung weist eine Person, die gerade einen Term vereinfacht, diesem Term zu? Welche Zeichen beachtet sie? Welche Rolle weist sie diesen Zeichen zu? Wie bezieht sie sie aufeinander? Was schließt sie daraus? Die hier vorgelegten Antworten auf diese Fragen bestätigen Befunde wie zum Beispiel jene in Falle (2007) oder auch Hoch und Dreyfus (2004). Wo sich aber diese Studien vorwiegend an der intendierten Struktur eines Ausdrucks orientieren und am Maß, inwiefern die Schülerinnen und Schüler davon abweichen, interessiert sich die vorgelegte Arbeit für die Charakterisierung der vom Individuum hergestellten Strukturierung und welche Bedeutung es ihr zuweist.

Die Frage, ob die aus einer Strukturierung erschlossene Umformung falsch oder richtig sei, hat in dieser Arbeit nicht erste Priorität. Die obigen zwei Beispiele (des Minuszeichens oder der Kombination von Plus- und Multiplikationszeichen) zeigen etwa, dass auch unangemessene – im Sinne von unintendierte – Strukturierungen zu korrekten Umformungen führen können. Erste Priorität hat in dieser Arbeit die Beschreibung der Vielfalt der Strukturierungen. Inwiefern eine Strukturierung angemessen oder unangemessen ist oder gar zu falschen Umformungen führt, ist allerdings in zweiter Priorität wichtig, vor allem auch im Zusammenhang mit der Kategorisierung der Strukturierungen. Beispielsweise resultieren die meisten Strukturierungen der Kategorie 1 (Abschnitt 6.3.4) in falschen Umformungen oder Strukturierungen der Kategorie 2 können das Umstrukturieren behindern (Abschnitt 5.2.3). So folgt diese Arbeit bei der Erklärung von Fehlern und Unangemessenheiten tendenziell der Argumentationslinie von Kirshner und Awtry (2004) sowie Radford (2010a): Die Schwierigkeiten der Lernenden werden als Probleme des Wahrnehmens verstanden und nicht als Probleme des internen Verarbeitens von internen Repräsentationen.

Beziehung zwischen der semiotisch-pragmatischen und der kognitionspsychologischen Sichtweise

Die semiotisch-pragmatische und die kognitionspsychologische Sichtweise sind zwei unterschiedliche Perspektiven der Forschenden. Basierend auf unterschiedlichen theoretischen Prämissen beschreiben sie den Forschungsgegenstand, hier das algebraische Umformen und Strukturieren. Weil es sich dabei um Sichtweisen der Forschenden – und nicht um Merkmale des Forschungsgegenstands – handelt, kann die Frage nach der Angemessenheit der Sichtweise auch auf einer meta-theoretischen Ebene diskutiert werden. Erstaunlicherweise sprechen dann Argumente dafür, dass sich die semiotisch-pragmatische und die kognitionspsychologische Sichtweise gegenseitig bedingen. Was damit gemeint ist, sei nun kurz skizziert.

Der semiotisch-pragmatische Ansatz setzt ein implizit normatives Geschehen voraus, der kognitionspsychologische ein kausales (vgl. Abschnitt 2.2.3). Der erste Ansatz geht also davon aus, dass die Handlungen der Personen durch implizite Normen geregelt sind, der zweite Ansatz setzt dem eine kausale Modellierung des Handlungsgeschehens entgegen. Sobald man nun die beiden Sichtweisen auf jegliches Handeln anwendet, erkennt man, dass sich die mit den Sichtweisen verbundenen theoretischen Prämissen bedingen (Rüede, 2007). Denn (implizit geregelte) Praktiken müssen von einer Person vollzogen werden: Wörter muss man sprechen oder aufschreiben, Handlungen muss man tätigen. Implizite Normen brauchen einen materiellen Träger. Materie folgt aber den Naturgesetzen und muss als kausal strukturiert behandelt werden. Insofern braucht es zuerst Objekte, die als „etwas“ behandelt werden können, damit das Befolgen impliziter Normen erst realisierbar wird. Das Befolgen impliziter Normen setzt also Kausalität voraus. Doch die Umkehrung gilt auch, denn Kausalität wohnt dem Geschehen selber nicht inne. Vielmehr hat eine Person gelernt, etwas *als* kausal verursacht zu behandeln. Die Person ist es, die einem Ereignis die Bedeutung der Ursache und einem anderen jene der Wirkung zuweist. Kausalität ist also auch nur eine Behandlungsweise, die gelernt werden muss – also implizit normativ organisiert ist. Erst wer impliziten Normen folgen kann, ist in der Lage, etwas als kausal zu betrachten. Also ist Kausalität nur vor einem implizit normativen Hintergrund begreifbar und umgekehrt sind implizite Normen nur auf einem kausal strukturierten Träger realisierbar. Damit wird deutlich: Erstens sind sowohl Kausalität als auch implizite Normen theoretische Konstrukte, zweitens setzt das eine das andere voraus.

Somit setzen sich die semiotisch-pragmatische und die kognitionspsychologische Sichtweise gegenseitig voraus. Das entlastet die Forschenden. Sie müssen ihre Sichtweise nicht rechtfertigen, sondern „nur“ auf eine Passung von Fragestellung und Methode hinarbeiten. So untersucht die vorgelegte Arbeit Strukturierungen aus semiotisch-pragmatischer Sicht. Eine kognitionspsychologisch orientierte Studie über Strukturierungen würde die hier dokumentierten Resultate ergänzen und erweitern. Wichtig werden dann Übersetzungen des Vokabulars der einen Sichtweise in jenes der anderen, um die Resultate einer kognitionspsychologisch verorteten Studie mit der vorgelegten Arbeit in Verbindung zu bringen. Gut möglich, dass dann zum Beispiel der Begriff des „Aspekts“ wichtig wird, den Malle (1993) verwendet. Er untersucht Umformungen von Termen und Gleichungen aus kognitionspsychologischer Sicht und spricht dabei vom Handlungs- und Beziehungs*aspekt* einer Formel. Dadurch greift er die operationalen und strukturalen Auffassungen von Sfard (1991) auf. Indem er weiter zwischen dem Gegenstands-, Einsetzungs- und Kalkül*aspekt* des Variablenbegriffs unterscheidet, verweist er auf unterschiedliche Rollen von Variablen in einem algebraischen Ausdruck (vgl. auch Usiskin, 1999). In anderen kognitionspsychologisch orientierten Arbeiten werden diese und ähnliche Aspekte als „Vorstellungen“ (Hrzan & Sefien, 2009) respektive „Grundvorstellungen“ bezeichnet (Prediger, 2009).

Aus anderen Bereichen der Algebra liegen schon Studien vor, wo die einen eine semiotisch-pragmatische und die anderen eine kognitionspsychologische Sichtweise einnehmen. So untersuchten beispielsweise Radford und Puig (2007) das Aufstellen und Lösen von Gleichungen bei Textaufgaben aus semiotisch-pragmatischer Sicht, in Malle (1993) ist hingegen die kognitionspsychologische Sichtweise dokumentiert.

Computeralgebrasysteme

Im aktuellen Algebraunterricht sind Computeralgebrasysteme (CAS) allgegenwärtig. Entsprechend groß ist die Anzahl mathematikdidaktischer Arbeiten zu diesem Gegenstand, verwiesen sei etwa auf Artigue (2002), Barzel (2012), Ferrara, Pratt und Robutti (2006), Heid und Edwards (2001), Kieran und Drijvers (2006), Solares und Kieran (2013) sowie Thomas, Monaghan und Pierce (2004). Aufgrund der gegenwärtigen Präsenz von CAS-Taschenrechnern in den Schulzimmern interessiert deren Einfluss auf den Prozess des Strukturierens von Termen und Gleichungen. Leider liegt die Diskussion dieses Themas außerhalb des Bereichs dieser Arbeit. Sie muss Gegenstand von Folgestudien sein. Trotzdem sei an dieser Stelle auf einen entscheidenden Punkt hingewiesen: Egal, ob das Lernen von algebraischen Umformungen durch ein Computeralgebrasystem unterstützt wird oder nicht, strukturieren muss man immer. Allerdings beeinflusst ein Computeralgebrasystem die konkrete Ausprägung der hergestellten Strukturierungen.

Wichtig ist die Feststellung, dass ein CAS-Taschenrechner einen algebraischen Ausdruck (intern) direkt symbolisch repräsentiert und auf diese Repräsentation explizit formulierte Regeln anwendet je nach Tastendruck. Also muss ein CAS-Taschenrechner analog zu einem kognitionspsychologischen Produktionssystem einen algebraischen Ausdruck nicht strukturieren – die Umformungen sind durch interne Algorithmen determiniert. Hingegen muss die Person, welche den CAS-Taschenrechner bedient, Strukturierungen herstellen können. Denn beim Umgang mit dem CAS-Taschenrechner stellen sich analoge Fragen wie etwa beim Vereinfachen von Termen. Was sich ändert, sind die anzuwendenden Regeln. Diese bestehen (auch) in den einzelnen Funktionstasten – und nicht mehr (nur) in den Regeln des algebraischen Kalküls, das heißt, der Term wird nicht mehr im Hinblick auf die Anwendung algebraischer Rechenregeln strukturiert, sondern im Hinblick auf die Anwendung der einzelnen Funktionstasten. Bei diesen Funktionstasten stellt sich wiederum die Frage, wie sie wann richtig verwendet werden. Dieselbe Argumentation wie in Abschnitt 2.1.2 führt dann zur Einsicht, dass der Umgang mit einem CAS-Taschenrechner im Impliziten fundiert ist und des Strukturierens gemäß den durch die Funktionstasten dargestellten Regeln bedarf.

Angenommen, es gäbe eine Taste, welche die Regel der Distributivität – und dabei die Richtung des Ausklammerns – auf den jeweils eingegebenen Ausdruck anwenden würde. Bei der Eingabe und bei der Interpretation der Ausgabe stellten sich dann Fragen nach dem Wie und Wann der Anwendung: Wie gebe ich $a^3 - 2a \cdot a - 1$ so ein, dass der Faktor a ausgeklammert werden kann? Wie teile ich dem CAS-Taschenrechner mit, dass er bei einem Ausdruck wie $\frac{x^2-1}{x-1}$ nur den Zähler ausklammert? Wann benutze ich diese Taste? Wie behandle ich den angezeigten Ausdruck, nachdem ich die Taste gedrückt habe? Das heißt, auch beim Rückgriff auf CAS-Taschenrechner besteht der Gebrauch von Termen und Gleichungen im Wissen, wie welche Taste wann angewendet wird. Das ist ein „Wissen, wie“ und leitet das Strukturieren des Ausdrucks.

Entsprechend wird sich das Strukturieren algebraischer Ausdrücke auch beim Einsatz eines CAS-Taschenrechners entlang der vier Stufen aus Abschnitt 6.3.4 entwickeln. Das Ziel wird die Behandlung eines Terms als Objekt bleiben. Inwiefern hierbei der CAS-Taschenrechner hilfreich ist, scheint eine offene Frage zu sein.

8.2.2 Die Individualität des Strukturierens

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung der Individualität beim Strukturieren algebraischer Ausdrücke. In der theoretischen Fundierung verschiebt daher die Arbeit den Fokus von der Struktur zur Strukturierung eines Ausdrucks. Entsprechend werden in den empirischen Untersuchungen die Unterschiede zwischen den Strukturierungen herausgearbeitet – nebst den Gemeinsamkeiten.

Nicht unerwartet bestätigen die empirischen Daten, dass jede Person individuell strukturiert. Zum Teil strukturierte eine befragte Person ganz anders als eine andere, zum Teil sehr ähnlich wie eine andere, aber immer noch anders. Wohl am eindrücklichsten ist diese Vielfalt bei den Experten. Ihre vorgenommenen Strukturierungen divergieren erstens stark und weichen zweitens mehrheitlich vom Lehrbuchwissen ab (Abschnitt 4.2.7). Von ganz analogen Beobachtungen berichten Smith, diSessa und Roschelle (1994). Gemäß diesen Autoren wählen Experten zum Vergleich von Bruchzahlen sehr unterschiedliche Strategien, die mehrheitlich vom Lehrbuchwissen abweichen. Allerdings wird dieses Lehrbuchwissen wichtig, sobald die Experten ihre Antworten begründen müssen. Erst in diesem Kontext führen sie ihre individuellen und situativ angepassten Strategien auf Vorgehensweisen zurück, wie sie in manchen Lehrbüchern beschrieben sind, beispielsweise auf die Strategie des Gleichnamig-Machens.

Die vorgelegte Arbeit negiert in keiner Weise die Wichtigkeit des Lehrbuchwissens etwa in der Form von schriftlich formulierten Verfahren und Regeln. Sie zeigt aber auf, dass sowohl Verfahren als auch Regeln neben ihrer normierenden Funktion immer auch begriffen werden müssen. Und das geschieht individuell unterschiedlich. Wie eine Person einen bestimmten Ausdruck strukturiert, ist nicht allein durch den Ausdruck vorgegeben und womöglich durch ein damit verbundenes – im Lehrbuch notiertes – optimales Verfahren. Wie eine Person diesen Ausdruck strukturiert, hängt offenbar von personalen und kontextuellen Bedingungen ab. So werden die hier vorgelegten Resultate interpretiert. Diese Interpretation bestätigt damit die von Verschaffel et al. (2011) hervorgehobene Erkenntnis, dass die Wahl der Strategie beim Berechnen arithmetischer Ausdrücke wesentlich durch die Person und den Kontext bestimmt ist und nicht durch den Ausdruck allein. Entsprechend ist das Konstrukt der adaptiven Expertise als abhängig von personalen und kontextuellen Faktoren definiert (Hatano & Oura, 2003; Payne, Bettman & Johnson, 2002). Der hier verwendete Begriff der Individualität wird also in der Psychologie erfasst mit Konstrukten wie „personale“ und „kontextuelle Faktoren“.

8.2.3 Ein Modell für die Entwicklung des Strukturierens

Die vorgelegte Arbeit schlägt ein Modell für die Entwicklung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke vor. Indem Umstrukturierungen sowohl von innen nach außen als auch von außen nach innen einbezogen werden, resultiert eine Erweiterung von bestehenden Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätzen. Das hier vorgeschlagene Modell postuliert ganz allgemein, dass Lernende in einem ersten Schritt einen algebraischen Ausdruck zuerst auf eine spezifische Art respektive auf mehrere voneinander unabhängige Arten behandeln. Erst mit der Zeit verbinden sie die eine Behandlungsweise mit einer zweiten und beginnen so, den algebraischen Ausdruck als Objekt zu behandeln. Es ist also vorstellbar, dass eine Person Terme zu Beginn als Prozesse und erst später als Objekte behandelt, wie etwa in den klassischen Arbeiten von Dubinsky (1991), Gray und Tall (1994) sowie Sfard (1991) beschrieben. Ebenso denkbar ist allerdings, dass eine andere Person Terme zuerst als Verfahren und nicht als Prozesse behandelt. Dabei manipuliert die Person zum Teil mit Termen als ganzen Einheiten, sie multipliziert eine Gleichung etwa mit dem Hauptnenner. Solche Entwicklungen sind etwa im Abschnitt 4.2.3 dokumentiert oder beispielsweise auch in Gilmore und Inglis (2008) – so die hier vertretene Interpretation jener Arbeit (Abschnitt 2.5.5). Das heißt, sowohl die Vom-Prozess-zum-Objekt-Ansätze als auch die (zum Beispiel von Gilmore und Inglis) als Gegenbeispiele bezeichneten Entwicklungsverläufe sind im hier vorgestellten Modell des Strukturierens integriert.

Es ist erhellend, die hier postulierten Entwicklungsstufen mit Hierarchiestufen in kognitiven Schemata zu vergleichen. Denn darüber hält Dörfler (1988, S. 122) fest:

> „Mathematische Objekte und mathematische Operationen sind essentiell Beziehungen zwischen mathematischen Objekten einer hierarchisch niedrigeren Stufe. Dabei ist die hierarchische Stufe keine absolute Eigenschaft der mathematischen Objekte, sondern sie ist relativ zum Konstruktionsprozess.“

Entscheidend ist in diesem Zitat das Wort „relativ“. Es bringt zum Ausdruck, dass die Hierarchiestufen durch den Lernweg bestimmt werden und nicht durch spezifische Eigenschaften des zu begreifenden mathematischen Objekts im Voraus festgelegt sind.

In gewisser Weise ist die hier behauptete Entwicklung des Strukturierens eine Entwicklung der Wahrnehmung algebraischer Ausdrücke. Die Wahrnehmung eines algebraischen Ausdrucks ist nach Abschnitt 6.3.1 eine Reaktion auf seine Inskription, geleitet durch das implizite Wissen der wahrnehmenden Person und verbalisierbar als nicht-inferentieller Bericht. Die Person muss sich die angemessene Wahrnehmung eines algebraischen Ausdrucks „erarbeiten“. Das Strukturieren ist ein Prozess, der mehrere Dutzend Sekunden dauern kann, wie die Beispiele in Kapitel 4 und 5 illustrieren. Beim Anschauen eines algebraischen Ausdrucks geschieht tatsächlich Entscheidendes und daher wird klar, dass Lernende der Algebra in diesen Prozess des Strukturierens, also des Wahrnehmens, einzuführen sind. Insofern belegt diese Arbeit die Notwendigkeit des *wahrnehmungsorientierten Lernens* (perceptual learning, Kellman et al., 2009) respektive die Notwendigkeit der Einführung der Lernenden in die kulturelle Praxis des Umgangs mit (wahrzunehmenden) Zeichen (Radford, 2010a).

Wesentlich ist, dass in dieser Arbeit das Wahrnehmen von Ausdrücken als die Art und Weise, als was eine Person sie behandelt, konzipiert ist. Während der Entwicklung des Strukturierens verändert sich also die Art und Weise, wie die Person die Ausdrücke behandelt. Eine analoge Veränderung ist in der Geschichte der Mathematik nachzuweisen. Krämer (1991) zufolge überwog in der Mathematik bis etwa ins 17. Jahrhundert jenes Denken, bei dem die mathematischen Zeichen für etwas Außermathematisches stehen. Die Dinge verliehen den Zeichen ihre Bedeutung. Beginnend mit dem 17. Jahrhundert, vorangetrieben etwa von Gottfried Wilhelm Leibniz, erhalten die mathematischen Zeichen vermehrt einen konstituierenden Charakter: Sie konstituieren die mathematischen Gegenstände. Im ersten Fall spricht Krämer vom *ontologischen Symbolismus*, im zweiten Fall vom *operativen Symbolismus*.

Beim ontologischen Symbolismus gehen die Gegenstände den Zeichen ontologisch voraus. Die Zeichen verweisen bloß auf den Gegenstand. Der Gegenstand bestimmt, wie das Zeichen zu verstehen ist. Analog behandeln wenig fortgeschrittene Lernende der Algebra einen Term als etwas, das zum Beispiel auf ein Verfahren verweist. Das Verfahren bestimmt dann, was der Term bedeutet, wie er folglich zu lesen und was mit ihm zu machen ist. Beim operativen Symbolismus hingegen stehen die Zeichen nicht für etwas anderes, sondern eigentlich für sich selbst. Sie erhalten ihre Bedeutung dadurch, wie sie zu den anderen Zeichen stehen, das heißt, wie mit ihnen im Zeichensystem respektive formalen Kalkül umzugehen ist. Wo beim ontologischen Symbolismus die Bedeutung durch den Gegenstand entsteht, durch den das Zeichen zu „ersetzen“ ist, entsteht sie beim operativen Symbolismus durch andere Zeichen, in die das eine Zeichen „umgewandelt“ werden kann (Krämer, 1991, S. 90–92). Die Zeichen erhalten eine rein interne Bedeutung (vgl. Abschnitt 2.3.1). Analog behandeln fortgeschrittene Lernende der Algebra einen Term als Objekt, dessen Eigenschaften bestimmt sind durch die Regeln des formalen Kalküls und folglich durch seine Umwandlungsmöglichkeiten, die sich in ihm als Strukturierungen manifestieren.

8.2.4 Förderung des Strukturierens durch multiple Lösungswege

Aufgaben zur Anregung von Umstrukturierungen wurden in Kapitel 7 als besonders geeignet zur Entwicklung des Strukturierens betrachtet, unabhängig davon, ob direkt oder indirekt zum Umstrukturieren aufgefordert wurde. Entscheidend war der gegenseitige Austausch über die einzelnen Bearbeitungen sowohl zwischen den Lernenden als auch zwischen den Lernenden und den Lehrenden. Solche kommunikativen Phasen über die unterschiedlichen Strukturierungen scheinen zu unterstützen, dass die einzelnen Lernenden Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Strukturierungen herstellen – und diese nicht bloß als unterschiedliche Verfahren behandeln.

Es liegen wenig Forschungsresultate zu multiplen Lösungswegen vor, wie Silver et al. (2005, S. 288) festhalten: “It is nearly axiomatic among those interested in mathematical problem solving as a key aspect of school mathematics that students should have experiences in which they solve problems in more than one way.” Jene Autoren arbeiten zudem eine Parallelität zwischen Forschung und Unterrichtsalltag heraus: Auch im Klassenzimmer spielt die Thematisierung verschiedener Lösungswege eine marginale Rolle. Das erstaunt, denn aus theoretischer Sicht spricht vieles für einen positiven Effekt von multiplen Lösungswegen auf den Lernstand der Schüler und Schülerinnen. Die empirischen Studien von Star und Seifert (2006), Star und Rittle-Johnson (2007) sowie Grosse (2005) scheinen dies zu untermauern. Letztere Autorin weist darauf hin, dass der positive Effekt von multiplen Lösungswegen auf den Lernstand vor allem auf die oftmals damit verbundene Präsenz von multiplen Darstellungen zurückzuführen sein könnte. Diese Hypothese ist plausibel und im Kontext des algebraischen Strukturierens sinnvoll. Denn das Umstrukturieren eines algebraischen Ausdrucks wird ja als konversionales Inferieren verstanden – in Analogie zu Konversionen zwischen unterschiedlichen Darstellungssystemen (Duval, 2006). Insofern stützt Grosses Hypothese die hier vorgebrachte Argumentation zur fördernden Wirkung von Aufgaben, die zum Umstrukturieren anregen.

8.3 Grenzen

Mit der Untersuchung von Strukturierungen bewegt man sich an der Grenze des empirisch Erfassbaren. Daher sind solche Untersuchungen vor allem methodisch anspruchsvoll. Zwei Punkte sind zentral: Erstens sind sich die Personen nicht immer bewusst, wie sie strukturieren. Zweitens kann Strukturieren eine rein interne Tätigkeit sein: Manche Person, die gerade strukturiert, zeigt dabei keine sichtbare Regung. Diesen Schwierigkeiten musste in den beiden Studien (Kapitel 4 und 5) begegnet werden. Der Entscheid fiel auf den methodischen Ansatz, dass die Personen ihre Strukturierungen verbal explizit machen, indem sie in Interviews darüber sprechen. Das hatte den Vorteil, dass die interviewten Personen auch Informationen darüber geben konnten, was die Strukturierungen für sie bedeuten. Der Nachteil war, dass die Reichhaltigkeit von verbalen Daten von der Fähigkeit des Verbalisierens der interviewten Personen abhängt. Gerade bei sprachlich schwachen Personen ist dies gravierend. Bei den hier interviewten Novizen und Experten spielte dies aber keine große Rolle, da die interviewten Novizen und Experten allesamt sprachlich eloquent waren. Ein anderer Nachteil ist, dass nicht-verbale Verhaltensweisen nur eine marginale Rolle spielen. Sie wurden nur zur eindeutigeren Interpretation der verbalen Daten herangezogen. Gerade in Anbetracht der Wichtigkeit von Gesten, rhythmischen Bewegungen und bildlichen Darstellungen votiert etwa Radford (2003) für eine gleichwertige Behandlung in der Auswertung von Verbalem und Nicht-Verbalem (vgl. auch Goldin-Meadow, Kim & Singer, 1999; Radford, Edwards, Arzarello, 2009; Roth, 2001). Daher sind in weiteren Studien zum Strukturieren von Termen und Gleichungen möglichst vielfältige Mittel des Explizierens zu berücksichtigen und nicht nur Formen des Verbalisierens.

Insgesamt muss festgehalten werden, dass Interviewdaten – egal ob verbale oder non-verbale – immer unvollständig und allenfalls sogar verfälscht sind, zudem können sie auch falsch interpretiert werden. Das ist umso schlimmer, weil die Anzahl der Probanden typischerweise klein ist, wie etwa in der vorgelegten Arbeit. Trotzdem zeigten sich Regelmäßigkeiten, die in die Form von Kategorien gebracht wurden. Inwiefern es sich dabei um Kategorien handelt, deren Relevanz und Angemessenheit sich auf die untersuchten Probanden beschränkt, oder die einfach die subjektiven Theorien des Autors spiegeln, kann nur dadurch beantwortet werden, dass weitere Studien dazu gemacht werden. Es besteht allerdings Zuversicht, dass die hier vorgestellten Resultate durchaus Berechtigung haben. Denn sie sind in der mathematikdidaktischen Literatur verankert, basieren auf zwei empirischen Studien und konnten in zwei Masterarbeiten an der Pädagogischen Hochschule Zürich reproduziert werden.

Die Stärke der vorgelegten Arbeit liegt in ihrem engen Fokus auf das kalkülorientierte algebraische Umformen, wie es typisch ist für die Jahrgangsstufen von etwa 8 bis 12. Leider ist dies sogleich auch ihre Schwäche. Es stellt sich die Frage, inwiefern die Ergebnisse verallgemeinerbar und übertragbar sind. Spielt beispielsweise die Umstrukturierung nur in diesem engen mathematischen Kontext jene zentrale Rolle, die ihr in dieser Arbeit gegeben wird? Wie sieht das in Bereichen aus, wo die externe Bedeutung von algebraischen Ausdrücken wichtig wird – die ja gerade im Rahmen der Einführung in die Algebra oftmals von entscheidender Bedeutung ist? Kann das Generieren von arithmetischen Ausdrücken als Objekte völlig analog konzipiert werden? Solche Fragen zeigen auf, dass auch die inhaltliche Grenze der in der vorgelegten Arbeit dargestellten theoretischen Überlegungen noch nicht klar ist und ebenso Gegenstand zukünftiger Studien sein muss. Insbesondere muss dazu auch die theoretische Sichtweise gewechselt werden. Es ist zu klären, inwiefern ein semiotisch-pragmatischer Ansatz den Blick auf das Strukturieren von Termen und Gleichungen einschränkt: Zukünftige Überlegungen sollten auch kognitionspsychologische Sichtweisen umfassen.

8.4 Ausblick

Dieser Abschnitt gibt einen Ausblick auf Forschungs- und Entwicklungsperspektiven, die sich aus der vorgelegten Arbeit ergeben.

8.4.1 Forschungsperspektiven

In dieser Arbeit sind Strukturierungen algebraischer Ausdrücke explorativ untersucht. Ausgehend davon ist auf Entwicklungsstufen des Strukturierens geschlossen. Insgesamt ist ein neues Forschungsgebiet eröffnet mit offenen methodischen und inhaltlichen Fragen.

Methodische Fragestellungen

Ein Zentrum zukünftiger Studien in diesem Bereich wird sein, die in dieser Arbeit dargestellen vier Kategorien zu bestätigen und aus unterschiedlichen (methodischen) Perspektiven zu validieren. Indem sowohl Bruchterme und Bruchtermgleichungen als auch lineare Gleichungen untersucht wurden und sich die Kategorien in beiden Aufgabentypen bewährten, kann davon ausgegangen werden, dass diese Kategorien auch auf weitere Aufgabentypen anwendbar sein werden. Wertvoll erscheint die Ausdehnung des Untersuchungsgegenstands auf folgende Bereiche:

- Sowohl die hier benutzten Bruchterme und Bruchtermgleichungen als auch die linearen Gleichungen waren ähnlich, sie fokussierten je auf einen

Aspekt, zum Beispiel bei den linearen Gleichungen auf den Umgang mit Klammertermen. Wie strukturieren Personen andere Bruchterme, Bruchtermgleichungen und lineare Gleichungen?

– Es bieten sich andere Typen an wie etwa quadratische Gleichungen und Terme oder Wurzelgleichungen.

– Neben dem Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen sind andere Fragestellungen zu untersuchen. Beispiel: Welche Strukturierungen stellen Personen beim Faktorisieren von Termen her? Dieses Beispiel wäre besonders interessant, weil die Möglichkeit des Vergleichs mit Hoch (2007) besteht, eine Studie speziell zum Struktursinn beim Faktorisieren.

Auch erste methodische Variationen könnten getestet und ganz andere Methoden der Erfassung erprobt werden. Beispielsweise wäre nun die Messung von Augenbewegungen attraktiv. Entsprechen den vier Kategorien unterschiedliche Muster in entsprechenden Messdaten? Eine weitere Möglichkeit ist in Abschnitt 7.3 angedeutet: Strukturierungen können mithilfe von Färbungen, Pfeilen, Umkreisen, Substituieren, Bündeln, zusätzlichen Klammern, Fachbegriffen etc. explizit gemacht werden. Wie nutzen Personen einer bestimmten Kategorie solche Mittel des Explizierens?

Inhaltliche Fragestellungen

Diese Arbeit schlägt vor, wie die Entwicklung der kalkülorientierten algebraischen Expertise konzipiert werden kann. Dabei scheint der Begriff der Strukturierung und des Strukturierens zentral. Es wird im weiteren Forschungsprozess darum gehen, die hier skizzierten Überlegungen zu festigen, zu verdichten und auszubauen. Drei Aspekte werden dabei wichtig sein:

1. Das Stufenmodell muss empirisch validiert werden. Anzustreben ist eine Längsschnittstudie. Solche Längsschnittstudien sind sowieso rar im Bereich der Entwicklung von algebraischen Kalkülkompetenzen. Als eine der wenigen Studien hat Demby (1997) in einem Längsschnitt die Entwicklung von Vorgehensweisen beim Vereinfachen von algebraischen Termen erforscht. In Caspi und Sfard (2012) ist eine Längsschnittstudie vorgestellt, welche die Entwicklung von formalen und informellen algebraischen Diskursen untersucht. Vorstellbar ist auch eine längsschnittartige Fallstudie wie etwa Levenson (2013). Sicher könnten Daten aus einem Längsschnitt aufzeigen, inwiefern bei der Entwicklung des Strukturierens tatsächlich die vier Stufen (Abschnitt 6.3) durchlaufen werden, insbesondere wie sich die transformationale und konversionale inferentielle Gliederung des impliziten Wissens im Laufe der Zeit ausbildet.

Interessant wäre eine methodische Triangulation: Wie entwickelt sich die algebraische Sprache der Schülerinnen und Schüler? Wie entwickeln sich ihre Strukturierungen? Inwiefern zeigt sich eine „Entwicklung von Gestik"? Das Ziel bestände in einer mehrdimensionalen Beschreibung der Entwicklung der algebraischen Kalkülkompetenz.

Wichtig ist hierbei zu überlegen, welche externen Variablen kontrolliert werden sollen. Soll der Unterricht der für die Längsschnittstudie ausgewählten Schulklassen kontrolliert werden? Soll es eine Interventionsstudie sein? Also ist vorgängig über eine Verortung der Längsschnittstudie in der mathematikdidaktischen Entwicklungsforschung zu entscheiden.

2. Lassen sich Synergien aus einer Gesamtschau auf die semiotisch-pragmatische respektive kognitionspsychologische Sichtweise gewinnen? In Abschnitt 8.2.1 ist die gegenseitige Bedingtheit dieser beiden Sichtweisen dargelegt. Vermutlich lassen sich Resultate der einen Sichtweise ins Vokabular der anderen Sichtweise übersetzen. Eine interessante Frage wäre hier: Wie lässt sich die transformationale und konversionale inferentielle Gliederung mit kognitionspsychologischem Vokabular formulieren? Wie sähe aus dieser Sichtweise die Entwicklung des Strukturierens aus? Wertvoll könnte vor allem die Kategorie des Umstrukturierens sein. Denn hier werden konversionale Inferenzen zwischen Strukturierungen hergestellt. Diese führen – im Sinne von kognitionspsychologischen Ansätzen – zur Herstellung von mathematischen Objekten. Es kann gut sein, dass dadurch detaillierter aufgezeigt werden kann, was beispielsweise Sfard (1991) meint, wenn sie von „hierarchischen, baumartigen Strukturen" (hierarchical tree-shaped structures, ebd., S. 28) spricht, die aus „unstrukturierten, linearen kognitiven Schemata" (unstructured, sequential cognitive schemata, ebd., S. 26) entstehen. Damit könnte ein Begriff wie etwa Aeblis (1980, 1981) Objektifizieren konkreter gefasst werden.

3. Es besteht Hoffnung, dass obige Punkte 1 und 2 helfen werden, die theoretischen Überlegungen voranzutreiben. Eine detaillierte Modellierung der Entwicklung des Strukturierens (inklusive des algebraischen kalkülorientierten Umformens) wäre das Ziel. Dazu liegen nur wenige Arbeiten vor, als Beispiele sind etwa Adi (1978), English und Sharry (1996) sowie Sfard (2008) zu nennen. Vermutlich wäre es bereichernd, auch die Entwicklung der arithmetischen Fähigkeiten im Blick zu haben. Denn in Arbeiten wie Dubinsky (1991), Gray und Tall (1994) oder auch Sfard (1991, 2008) werden die Parallelen zwischen der Arithmetik und der Algebra offensichtlich. Der Begriff der Strukturierung könnte sich eignen zur Ausarbeitung dieser Parallelen. Besonders der Fokus auf das Umstrukturieren wäre interessant. Arbeiten zum Strukturieren in

der Arithmetik (Lüken, 2012; Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004; Söbbeke, 2005) machen Mut, dass dies gelingen könnte.

Abschließend sei auf den aktuellen Algebraunterricht hingewiesen, insbesondere auf das Strukturieren im Kontext des Einsatzes von CAS-Rechnern (Abschnitt 8.2.1). Es könnte durchaus wertvoll sein, offene Fragen beim Einsatz von CAS-Rechnern im Mathematikunterricht unter Nutzung des Konzepts der Strukturierung anzugehen. Erste Anhaltspunkte könnten hier beispielsweise Bokhove und Drijvers (2010) liefern oder auch Kieran und Drijvers (2006).

8.4.2 Entwicklungsperspektiven

Gerade Kapitel 7 nährt die Hoffnung, dass durch die Betonung des Strukturierens im Algebraunterricht die Schülerinnen und Schüler kompetenter beim Vereinfachen von Termen und Lösen von Gleichungen werden. Dieses Anliegen kann in zwei Richtungen vorangetrieben werden.

Erstens ist eine konkrete Umsetzung dieser Idee in Unterrichtsmaterialien für die Sekundarstufen I und II anzustreben. Die beiden Aufgabenformate in Abschnitt 7.1 und 7.2 zeigen, welche Art von Aufgaben in den Algebraunterricht einbezogen werden könnten. Doch Aufgabenformate allein regeln die Sache nicht. Abschnitt 7.3 macht deutlich, dass die Entwicklung des Strukturierens nicht nur eine Frage der Entwicklung von Lehrmitteln, sondern auch eine Frage der Unterrichtsentwicklung ist.

Zweitens ist diese Konzeption des Algebraunterrichts empirisch zu rechtfertigen. Es muss belegt werden, dass die Betonung des Strukturierens in der Algebra tatsächlich mit einer höheren Expertise im algebraischen Umformen korreliert. Es bieten sich daher entsprechende Interventionsstudien an. Ein erster Schritt in diese Richtung sind meine eigenen gegenwärtigen Arbeiten, in denen detaillierter untersucht wird, wie Probanden unterschiedlichen Alters und unterschiedlicher algebraischer Leistungsfähigkeit mit den beiden Aufgabenformaten von Abschnitt 7.1 und 7.2 umgehen. Wichtig scheint hier zu sein, die Schülerinnen und Schüler zum Probieren zu ermutigen. Es braucht Mut, Neues und Unsicheres zu wagen, was heißt, eventuell etwas falsch zu machen. Vermutlich hat eine Expertise im Strukturieren mit einer entsprechenden Haltung zu tun, mit einem entsprechenden Bild von Mathematik. Im Bereich der Algebra sprechen zum Beispiel Bokhove und Drijvers (2010, S. 47) vom fehlenden „Selbstvertrauen", das den Blick auf die „Gestalt" verstellt. Ebenso legen empirische Belege aus anderen Bereichen der Mathematik einen solchen Zusammenhang nahe (Muis, 2004; Schoenfeld, 1985, 1987; Schommer-Aikins, Duell & Hutter, 2005). Es wäre also erfolgsversprechend zu untersuchen, inwiefern mit der Entwicklung des Strukturierens eine Änderung beim Bild von Mathematik einhergeht, das sich Personen machen.

Literaturverzeichnis

Adi, H. (1978). Intellectual Development and Reversibility of Thought in Equation Solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 9* (3), 204–213.

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns*. Band 1. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns*. Band 2. Stuttgart: Klett-Cotta.

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Alten, H.-W., Djafari Naini, A., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. & Wussing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14* (3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25* (2), 42–47.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflexion about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245–274.

Arzarello, F., Bosch, M., Gascon, J. & Sabena, C. (2008). The Ostensive Dimension through the Lenses of two Didactic Approaches. *ZDM Mathematics Education, 40*, 179–188.

Ball, L., Pierce, R. & Stacey, K. (2003). Recognising Equivalent Algebraic Expressions: An Important Component of Algebraic Expectation for Working with CAS. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Hrsg.), *Proceedings ot the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Band 4, S. 15–22). Hawaii: CRDG, University of Hawaii.

Ball, L., Stacey, K. & Pierce, R. (2001). Assessing Algebraic Expectation. In J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Hrsg.), *Numeracy and Beyond: Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Band 1, 66–73). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ballstaedt, S. P., Mandl, H., Schnotz, W. & Tergan, S. O. (1981). *Texte verstehen, Texte gestalten.* München: Urban & Schwarzenberg.

Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2012). Evolution of a Teaching Approach for Beginning Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 80*, 351–367.

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht.* Münster: Waxmann.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Köln: Aulis.

Bauersfeld, H. (2000). Fachdidaktische Forschung, individuelle Erfahrung. In E. Begemann (Hrsg.), *Lernen Verstehen – Verstehen lernen* (S. 397–417). Frankfurt am Main: Lang.

Beck, C. & Jungwirth, H. (1999). Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 20* (4), 231–259.

Beck, C. & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14* (2), 147–179.

Bergsten, C. (1999). From Sense to Symbol Sense. In I. Schwank (Hrsg.), *European Research in Mathematics Education I.II* (S. 123–134). Forschungsinstitut fur Mathematikdidaktik, Osnabrück.

Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen.* Dissertation. Universität Duisburg-Essen.

Bernard, J. E. (1983). An Essay on Perception and Understanding of Mathematical Symbolism. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14* (4), 489–496.

Bernard, J. E. & Bright, G. W. (1984). Student Performance in Solving Linear Equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 15* (4), 399–421.

Biehler, R. & Leiss, D. (Hrsg.) (2010). *Empirical Research on Mathematical Modelling.* Themenheft des Journals für Mathematik-Didaktik, 31 (1).

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation.* Hildesheim: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A., Kidron, I. & Dreyfus, T. (2011). Epistemisch handeln können – aber wie? In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 7–14). Münster: WTM.

Boero, P. (2001). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Hrsg.), *Perspectives on School Algebra* (S. 99–119). Dordrecht: Kluwer.

Boero, P., Bazzini, L. & Garuti, R. (2001). Metaphors in Teaching and Learning Mathematics: A Case Study Concerning Inequalities. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th PME International Conference, 2* (S. 185–192). Utrecht.

Bokhove, C. & Drijvers, P. (2010). Symbol Sense Behavior in Digital Activities. *For the Learning of Mathematics, 30* (3), 43–49.

Bookman, J. (1993). An Expert Novice Study of Metacognitive Behavior in Four Types of Mathematics Problems. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 3* (3), 284–314.

Booth, L. R. (1989). A Question of Structure. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (S. 57–59). Hillsdale: Erlbaum.

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2005). Science or Magic? The Use of Models and Theories in Didactics of Mathematics. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the IVth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (S. 1254–1263). Barcelona: Universidad Ramon Llull Editions.

Brandom, R. B. (2000). *Expressive Vernunft.* Frankfurt: Suhrkamp.

Breger, H. (1990). Know-how in der Mathematik. Mit einer Nutzanwendung auf die unendlichkleinen Grössen. In D. Spalt (Hrsg.), *Rechnen mit dem Unendlichen* (S. 43–57). Basel: Birkhäuser.

Breger, H. (1992). Tacit Knowledge in Mathematical Theory. In J. Echeverria, A. Ibarra & T. Mormann (Hrsg.), *The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations* (S. 79–90). Berlin: de Gruyter.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247–285.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Smith Reed, B. & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representation in Learning Algebra. *American Educational Research Journal, 34* (4), 663–689.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte.* Bern: Hans Huber.

Bromme, R., Rambow, R. & Strässer, R. (1996). Jenseits von „Oberfläche" und „Tiefe": Zum Zusammenhang von Problemkategorisierungen und Arbeitskontext bei Fachleuten des Technischen Zeichnens. In H. Gruber & A. Ziegler (Hrsg.), *Expertiseforschung: Theoretische und methodische Grundlagen* (S. 150–168). Opladen: Westdeutscher Verlag.

Brunner, M. (2011). Ständige Restrukturierung – ein Erfordernis des Lernens von Mathematik. *mathematica didactica, 34*, 20–49.

Brunner, M. (2013). Didaktikrelevante Aspekte im Umfeld der Konzepte *token* und *type*. *Journal für Mathematik-Didaktik, 34* (1), 53–72.

Burton, M. B. (1988). A Linguistic Basis for Student Difficulties with Algebra. *For the Learning of Mathematics, 8* (1), 2–7.

Byers, V. & Erlwanger, S. (1984). Content and Form in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 259–275.

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The Cylic Nature of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem-Solving Framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 45–75.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebraic in the Elementary School*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Hrsg.), *Handbook of Research in Mathematics Education* (S. 669–705). Greenwich: Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (2), 87–115.

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous Meta-Arithmetic as a First Step Toward School Algebra. *International Journal of Education Research, 51–52*, 45–65.

Chevallard, Y. (2005). Steps Towards a New Epistemology in Mathematics Education. In M. Bosch (Hrsg.), *Proceedings of the IVth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (S. 22–30). Barcelona: Universidad Ramon Llull Editions.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. & Glaser, R. (1981). Categorization and Representation of Physic Problems by Experts and Novices. *Cognitive Science, 5*, 121–152.

Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. & Christou, C. (2013). Examining Number Sense and Algebraic Resoning through Cognitive Styles. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 205–223.

Cohors-Fresenborg, E. & Striethorst, A. (2003). Untersuchung individueller Unterschiede in der mentalen Repräsentation von symbolverarbeitenden Regelsystemen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35* (3), 94–101.

Cooper, G. & Sweller, J. (1987). Effects of Schema Acquisition and Rule Automation on Mathematical Problem-Solving Transfer. *Journal of Educational Psychology, 79* (4), 347–362.

Cortes, A. (2003). A Cognitive Model of Experts' Algebraic Solving Methods. In *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Band 2, 253–260). Honolulu: CRDG.

Cotrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K. & Thomas, K. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15* (2), 167–192.

Crowley, L. & Tall, D. (1999). The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in Achieving Goals in College Algebra. In O. Zaslavsky (Hrsg.), *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Eduaction* (Band 2, S. 225–232). Haifa: PME.

Davis, G. E. & McGowen, M. A. (2001). *Embodied Objetcs and the Signs of Mathematics*. Paper prepared for the PME 25 Discussion Group „Symbolic Cognition in Advanced Mathematics". Ütrecht: Freudenthal Institut, Universitity of Ütrecht.

Davis, R. B. (1975). Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1* (3), 7–35.

Deller, H., Gebauer, P. & Zinn, J. (2012). *Algebra 1: Aufgaben*. Zürich: Orell Füssli.

Demby, A. (1997). Algebraic Procedures used by 13- to 15-Year-Olds. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 45–70.

Dörfler, W. (1988). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktionen. In W. Dörfler (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (S. 55–126). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Dörfler, W. (2006a). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27* (3/4), 200–219.

Dörfler, W. (2006b). Inscriptions as Objects of Mathematical Activities. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Hrsg.), *New Mathematics Education Research and Practice* (S. 97–111). Rotterdam: Sense Publishers.

Dörfler, W. (2008). Mathematical Reasoning: Mental Activity or Practice with Diagrams. In M. Niss (Hrsg.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Roskilde: IMFUFA, Roskilde University.

Dörfler, W. (2010). Mathematische Objekte als Indizes in Diagrammen. Funktionen in der Analysis. In G. Kadunz, *Sprache und Zeichen* (S. 25–48). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Dowker, A. (1992). Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (1), 45–55.

Drijvers, P. (2002). Learning Mathematics in a Computer Algebra Environment: Obstacles Are Opportunities. *ZDM Mathematics Education, 34* (5), 221–228.

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit.* Münster: Waxmann.

Drouhard, J.-P. & Teppo, A. R. (2004). Symbols and Language. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The* 12^{th} *ICMI Study* (227–264). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. O. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 55–92.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton et al. (Hrsg.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (S. 275–282). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

English, L. D. & Sharry, P. V. (1996). Analogical Resoning and the Development of Algebraic Abstraction. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 135–157.

Epple, M. (1994). Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. *Mathematische Semesterberichte, 41*, 113–133.

Ericsson, K. A. (2006). Protocol Analysis and Expert Thought: Concurrent Verbalizations of Thinking during Experts' Performance on Representative Tasks. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. Feltovich & R. R. Hoffman (Hrsg.), *Cambridge Handbook of Expertise and Expert Performance* (S. 223–242). Cambridge: Cambridge University Press.

Eriscsson, K. A. & Simon, H. A. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review, 87* (3), 215–251.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany: State University of New York.

Eysenck, M. W. & Keane, M. T. (2010). *Cognitive Psychology*. New York: Psychology Press.

Falle, J. (2007). Students' Tendency to Conjoin Terms: An Inhibition to their Development of Algebra. In J. Watson & K. Besweck (Hrsg.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, S. 285–294). Hobart: MERGA.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus. In A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (S. 237–273). Rotterdam: Sense Publishers.

Feyerabend, P. (1976). *Wider den Methodenzwang*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 19–25.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. (2008). Cognitive Tendencies and Generating Meaning in the Acquisition of Algebraic Substitution and Comparison Methods. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojana & A. Sepulveda (Hrsg.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 30th Conference of PME-NA* (Band 3, S. 9–16). Morelia: Cinvestav-UMSNH.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3–17.

Fischer, R. (1984). Geometrie der Terme oder elementare Algebra vom visuellen Standpunkt aus. *Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 11*, 29–44.

Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden*. Dissertation. Universität Dortmund.

Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52*, 1–7.

Font, V., Bolite, J. & Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in Mathematics Classroom: Analyzing the Dynamic Process of Teaching and Learning of Graph Functions. *Educational Studies in Mathematics, 75* (2), 131–152.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The Emergence of Objects from Mathematical Practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N. & Acevedo, J. I. (2010). The Object Metaphor and Synecdoche in Mathematics Classroom Discourse. *For the Learning of Mathematics, 30* (1), 15–19.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer.

Gallin, P. & Hussmann, S. (2006). Schreiben – Lesen – Rückmelden. Dialogischer Unterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48*.

Gick, M. L. (1986). Problem-Solving Strategies. *Educational Psychologist, 21* (1 & 2), 99–120.

Gilmore, C. & Inglis, M. (2008). Process- and Object-based Thinking in Arithmetic. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojana & A. Sepulveda (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, 73–80). Morelia: Cinvestav-UMSNH.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the Meaning of Mathematical Objects as a Priority Area of Research in Mathematics Education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Hrsg.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (S. 177–195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. & Batanero, C. (2003). Semiotic Functions in Teaching and Learning Mathematics. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger & V. V. Cifarelli (Hrsg.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (S. 149–167). Ottawa: LEGAS.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education, 39*, 127–135.

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In L. D. English (Hrsg.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (S. 197–212). London: Erlbaum.

Goldin-Meadow, S., Kim, S. & Singer, M. (1999). What the Teacher's Hands Tell the Student's Mind About Math. *Journal of Educational Psychology, 91* (4), 720–730.

Graham, A. T. & Thomas, M. O. J. (2000). Building a Versatile Understanding of Algebraic Variables with a Graphic Calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 265–282.

Gray, E. M. (1991). An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic. Preference and its Consequences. *Educational Studies in Mathematics, 22* , 551–574.

Gray, E. M. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A „Proceptual“ View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (1), 116–140.

Gropengiesser, H. (2007). *Didaktische Rekonstruktion des Sehens*. Oldenburg: Didaktisches Zentrum.

Grosse, C. S. (2005). *Lernen mit multiplen Lösungswegen*. Münster: Waxmann.

Guski, R. (2000). *Wahrnehmung – eine Einführung in die Psychologie der menschlichen Informationsaufnahme*. Stuttgart: Kohlhammer.

Gruber, H. & Mandl, H. (1996). Das Entstehen von Expertise. In J. Hoffmann & W. Kintsch (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie, Band 7: Lernen* (S. 583–615). Göttingen: Hogrefe.

Grzesik, J. (1990). *Textverstehen lernen und lehren. Geistige Operationen im Prozess des Textverstehens und typische Methoden für die Schulung zum kompetenten Leser*. Stuttgart: Klett.

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton: Princeton University Press.

Hall, R. D. G. (2002). An Analysis of Thought Processes during Simplification of an Algebraic Expression. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 15*.

Harnad, S. (Hrsg.) (1987). *Categorial Perception. The Groundwork of Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hasemann, K., Hefendehl-Hebeker, L. & Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2006). Themenheft: Semiotik in der Mathematikdidaktik – Lernen anhand von Zeichen und Repräsentationen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27.*

Hatano, G. & Oura, Y. (2003). Commentry: Reconceptualizing School Learning Using Insight from Expertise Research. *Educational Researcher, 32*, 26–29.

Heid, M. K. & Edwards, M. T. (2001). Comupter Algebra Systems: Revolution or Retrofit for Today's Mathematics Classrooms? *Theory into Practice, 40*, (2), 128–136.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Wien: Springer.

Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation. *The Mathematics Teacher, 73* (8), 572–580.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59–78.

Hewitt, D. (2003). Notation Issues: Visual Effects and Ordering Operations. In N. A. Patemann, B. J. Dougherty & T. Z. Joseph (Hrsg.), *Proceedings of the 27th Annual Conferenc of PME* (Band 3, S. 63–69). Honolulu: CRDG.

Hewitt, D. (2012). Young Students Learning Formal Algebraic Notation and Solving Linear Equations: Are Commonly Experienced Difficulties Avoidable? *Educational Studies in Mathematics*

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 65–98). New York: Macmillan.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (S. 1–27). Hillsdale: Erlbaum.

Hischer, H. & Lambert, A. (2003). Begriffs-Bildung und Computeralgebra. In H. Hischer, *Mathematikunterricht und Neue Medien* (S. 138–166). Hildesheim: Franzbecker.

Hoch, M. (2007). *Structure Sense in High School Algebra.* Dissertation. Universität Tel Aviv.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 49–56). Bergen, Norway: Bergen University College.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 145–152). Melbourne: PME.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2010). Nicht nur umformen, auch Strukturen erkennen und identifizieren – Ansätze zur Entwicklung eines algebraischen Struktursinns. *Praxis der Mathematik in der Schule, 33*, 25–29.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum Verlag.

Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung.* Frankfurt: Vittorio Klostermann.

Hoffmann, M. H. G. & Roth, W.-M. (2004). Learning by Developing Knowledge Networks. *ZDM Mathematics Education, 36* (6), 196–204.

Hrzan, J. & Sefien, E. (2009). Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Teil 2. *Das Journal für den frühen mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1* (2), 64–68.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J. & Miller, J. L. (2007). Investigating High-School Students' Reasoning Strategies when They Solve Linear Equations. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 115–139.

Hußmann, S. (2002). *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen – Mathematik unterrichten in einem offenen Lernarrangement.* Hildesheim: Franzbecker.

Jansen, A. R. & Yelland, G. W. (2003). Comprehension of Algebraic Expressions by Experienced Users of Mathematics. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 56A* (1), 3–30.

Jansen, A. R., , Marriott, K. & Yelland, G. W. (2007). Parsing of algebraic expressions by experienced users of mathematics. *European Journal of Cognitive Psychology, 19* (2), 286–320.

Janssen, T. (2012). Ausbildung algebraischen Struktursinns im alltäglichen Klassenunterricht. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 417–420). Münster: WTM.

Jones, I. (2009). *Equality Statements as Rules for Transforming Arithmetic Notations.* Dissertation. Universität Warwick.

Jones, I. & Pratt, D. (2012). A Substituting Meaning for the Equals Sign in Arithmetic Notating Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43* (1), 2–33.

Jungwirth, H. (1998). Das „andere" Beispiel: Interpretative Mathematik. In W. Kannonier-Finster & M. Ziegler (Hrsg.), *Exemplarische Erkenntnis: Zehn Beiträge zur interpretativen Erforschung sozialer Wirklichkeit* (S. 139–161). Innsbruck: Studien Verlag.

Kadunz, G. (Hrsg.) (2010). *Sprache und Zeichen.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kaput, J. J. (1989). Linking Represenations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (S. 167–194). Hillsdale: Erlbaum.

Kellman, P. J., Massey, C. M. & Son, J. Y. (2009). Perceptual Learning Modules in Mathematics: Enhancing Students' Pattern Recognition, Structure Extraction, and Fluency. *Topics in Cognitive Science, 2* (2), 1–21

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Hrsg.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (S. 33–56). Hillsdale: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 390–419). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8* (1), 139–151.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Guitérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (S. 11–49). Rotterdam: Sensepublishers.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The Co-emergence of Machine Techniques, Paper-and-pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A study of CAS Use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, 205–263.

Kirshner, D. (1989). The Visual Syntax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (3), 274–287.

Kirshner, D. (2006). A New Curriculum for Structural Understanding of Algebra. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 10* (3), 169–187.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (4), 224–257.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (4), 297–312.

Kohlberg, L. (2001). Moralstufen und Moralerwerb: Der kognitiv-entwicklungstheoretische Ansatz (1976). In W. Edelstein, F. Oser & P. Schuster (Hrsg.), *Moralische Erziehung in der Schule* (S. 35–62). Weinheim: Beltz.

Kortenkamp, U. (2005). Klammergebirge als Strukturierungshilfe in der Algebra. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 319–322). Hildesheim: Franzbecker.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R. & Arami, M. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 225–250.

Krämer, S. (1991). *Berechenbare Vernunft. Kalkül und Rationalismus im 17. Jahrhundert.* Berlin: Walter de Gruyter.

Krummheuer, G. (1982). Rahmenanalyse zum Unterricht einer achten Klasse über „Termumformungen". In Bauersfeld, H. et al. (Hrsg.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht* (Band 5, S. 41–103). Köln: Aulis.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (S. 229–270). Hillsdale: Erlbaum.

Lamnek, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung.* Weinheim: Beltz.

Landy, D. & Goldstone, R. L. (2007a). How Abstract Is Symbolic Thought? *Journal of Experimental Psychology, 33* (4), 720–733.

Landy, D. & Goldstone, R. L. (2007b). Formal Notations Are Diagrams: Evidence from a Production Task. *Memory & Cognition, 35* (8), 2033–2040.

Larkin, J., McDermott, J., Simon, D. P. & Simon, H. A. (1980). Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems. *Science, 208*, 1335–1342.

Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987). Why a Diagram is (Sometimes) Worth than Thousand Words. *Cognitive Science, 11*, 65–99.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60* (1), 1–64.

Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (Hrsg.) (2011). Lernende abholen, wo sie stehen. Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 53.*

Leontiev, A. A. (1981). ‚Sign and Activity', Translated by J. V. Wertsch (Hrsg.), *The Concept of Activity in Soviet Psycholgoy* (S. 241–255). New York: Sharpe.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46* (1–3), 87–113.

Lester, F. K. (1994). Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 660–675.

Levenson, E. (2013). Exploring One Student's Explanations at Different Ages: The Case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 181–203.

Lewis, C. (1981). Skill in Algebra. In J. R. Anderson (Hrsg.), *Cognitive Skills and Their Acquisition* (S. 85–110). Hillsdale: Erlbaum.

Liebenberg, R., Sasman, M. & Olivier, A. (1999). From Numerical Equivalence to Algebraic Equivalence. In *Proceedings of the 5th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* (Band 2, S. 173–183). Port Elizabeth: Port Elizabeth Technikon.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39–65.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40* (2), 173–199.

Linchevski, L. & Livneh, D. (2002). The Competition between Numbers and Structure: Why Expressions with Identical Algebraic Structures Trigger Different Interpretations. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 24* (2), 20–35.

Lörcher, G. A. (1987). Schülerschwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion von Termen. In: Kupari, P. (Hrsg.), *Mathematics Education Research in Finland* (S. 65–84).

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Münster: Waxmann.

Lyle, J. (2003). Stimulated Recall: a report on its use in naturalistic research. *British Educational Research Journal, 29* (6), 861–878.

MacGregor, M. & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (4), 449–467.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33* (1), 1–19.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Martin, J. (2013). Differences between Experts' and Students' Conceptual Images of the Mathematical Structure of Taylor Series Convergence. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 267–283.

Mason, J. & Spence, M. (1999). Beyond Mere Knowledge of Mathematics: The Importance of Knowing-To Act in the Moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 135–161.

Mason, J., Stephens, M. & Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal, 21* (2), 10–32.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. In D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25–50). New York: Academic Press.

Mayer, R. E. (1982). Different Problem-Solving Strategies for Algebra Word and Equation Problems. *Journal of Experimental Psychology, 8* (5), 448–462.

Mayring, P. (2003). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Weinheim: Beltz.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2004). You'll See What You Mean: Students Encode Equations Based on Their Knowledge of Arithmetic. *Cognitive Science, 28*, 451–466.

Medin, D. L. & Ross, B. H. (1989). The Specific Character of Abtract Thought: Categorization, Problem Solving, and Induction. In R. J. Sternberg (Hrsg.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence* (Band 5, S. 189–223). Hillsdale: Erlbaum.

Merzbach, U. C. & Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics*. Hoboken: Wiley.

Meyer, M. (2010). Worte und ihr Gebrauch. Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen. Die Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 49–82). Hildesheim: Franzbecker.

Mok, I. A. C. (2010). Students' Algebra Sense via Their Understanding of the Distributive Law. *Pedagogies: An International Journal, 5* (3), 251–263.

Molina, M. & Mason, J. (2009). Justifications-on-Demand as a Device to Promote Shifts of Attention Associated With Relational Thinking in Elementary Arithmetic. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9* (4), 224–242.

Muis, K. R. (2004). Personal Epistemology and Mathematics: A Critical Review and Synthesis of Research. *Review of Educational Research, 74*, 317–377.

Muis, K. R. (2008). Epistemic Profiles and Self-regulated Learning: Examining Relations in the Context of Mathematics Problem Solving. *Contemporary Educational Psychology, 33*, 177– 208.

Mulligan, J. T., Prescott, A. & Mitchelmore, M. (2004). Children's Development of Structure in Early Mathematics. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3 (S. 393–400). Bergen: Bergen University College.

van Nes, F. T. (2009). *Young children's spatial structuring ability and emerging number sense.* Dissertation. Universität Utrecht.

Nesher, P. (1986). Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 2–9.

Nogueira de Lima, R. & Tall, D. (2008). Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics, 67* (1), 3–18.

Novotna, J. & Hoch, M. (2008). How Structure Sense for Algebraic Expressions or Equations is Related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20* (2), 93–104.

Ottmar, E., Landy, D. & Goldstone, R. L. (2012). Teaching the Perceptual Structure of Algebraic Expressions: Preliminary Findings from the Pushing Symbols Intervention. In *Thirty-Fourth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 2156–2161). Sapporo, Japan.

Payne, J. W., Bettman, J. R. & Johnson, J. R. (2002).*The Adaptive Decision Maker.* Cambridge: Cambridge University Press.

Payne, S. J. & Squibb, H. R. (1990). Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. *Cognitive Science, 14*, 445–481.

Pierce, R. & Stacey, K. (2001). A framework for Algebraic Insight. In J. Bobis, B. Perry, & M. Mitchelmore (Hrsg.), *Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Band 2, S. 418–425). Sydney: MERGA.

Pierce, R. U. & Stacey, K. C. (2002). Algebraic Insight: The Algebra Needed to Use Computer Algebra Systems. *The Mathematics Teacher, 95* (8), 622–627.

Pirie, S. E. & Martin, L. (1997). The Equation, the Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 159–181.

Pomerantsev, L. & Korosteleva, O. (2003). Do Prospective Elementary and Middle School Teachers Understand the Structure of Algebraic Expressions? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, Vol. 1: Content Knowledge*, December 2003 (elektronische Zeitschrift).

Prechtl, P. (1999). *Sprachphilosophie.* Stuttgart: Metzler.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz &

S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

Proulx, J. (2013). Mental Mathematics, Emergence of Strategies, and the Enactivist Theory of Cognition. *Educational Studies in Mathematics*. Online First: DOI 10.1007/s10649-013-9480-8.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35* (1), 277–302.

Radford, L. (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237–268.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Written: A Semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22* (2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5* (1), 37–70.

Radford, L. (2005). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt & B. Davis (Hrsg.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (S. 111–117). Edmonton: CMESG.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Saiz & A. Mendez (Hrsg.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of PME-NA*, (Band 2, S. 1–21). Merida: Universidad Pedagogica Nacional.

Radford, L. (2008). The Ethics of Being and Knowing: Towards a Cultural Theory of Learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Hrsg.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Classroom, and Culture* (S. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010a). The Eye as a Theoretician: Seeing Structures in Generalizing Activities. *For the Learning of Mathematics, 30* (2), 2–7.

Radford, L. (2010b). Algebraic Thinking from a Cultural Semiotic Perspective. *Research in Mathematics Education, 12* (1), 1–19.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (Hrsg.) (2009). Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 70* (2).

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 145–164.

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen.* Hildesheim: Franzbecker.

Reitschert, K. & Hössle, C. (2007). Wie Schüler ethisch bewerten. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 13*, 125–143.

Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben.* Habilitation, Universität Bern: Selbstverlag.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S. & McEldoon, K. L. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct-Modeling Approach. *Journal of Educational Psychology, 103* (1), 85–104.

Roth, M.-W. (2001). Gestures: Their Role in Teaching and Learning. *Review of Educational Research, 7* (3), 365–392.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte“ und „das Doppelte“ – Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung.* Hildesheim: Franzbecker.

Rüede, C. (2007). Standards für Standards. *Gymnasium Helveticum*, Heft 4, 29–32.

Rüede, C. (2009). Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30* (2), 93–120.

Rüede, C. (2012a). Zur Förderung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (721–724). Münster: WTM.

Rüede, C. (2012b). Ein Blick für Termstrukturen. *mathematik lehren, 171*, 55–59.

Rüede, C. (2012c). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 113–141.

Rüede, C. (2013). How Secondary Level Teachers and Students Impose Personal Structure on Fractional Expressions and Equations – an Expert-Novice Study. *Educational Studies in Mathematics, 83* (3), 387–408.

Ruf, U. & Gallin, P. (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Sáenz-Ludlow, A. & Presmeg, N. (Hrsg.) (2006). *Semiotic Perspectives on Learning Mathematics and Communicating Mathematically.* Educational Studies in Mathematics, 61 (1/2).

Sáenz-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third Graders’ Interpretations of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 153–187.

Santi, G. (2011). Objectification and Semiotic Function. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 285–311.

Schacht, F. (2012). *Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Schnotz, W. (1988). Textverstehen als Aufbau mentaler Modelle. In H. Mandl & H. Spada (Hrsg.), *Wissenspsychologie* (S. 299–330). München: Psychologie Verlags Union.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of text and picture comprehension. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 49–69). New York: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's All the Fuss about Metacognition? In A. H. Schoenfeld (Hrsg.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (S. 189–215). Hillsdale: Erlbaum.

Schommer-Aikins, M., Duell, O. K. & Hutter, R. (2005). Epistemological Beliefs, Mathematical Problem-solving Beliefs, and Academic Performance of Middle School Students. *Elementary School Journal, 105* (3), 289–304.

Schwartz, D. L., Bransford, J. D. & Sears, D. (2005). Efficiency and Innovation in Transfer. In J. Mestre (Hrsg.), *Transfer of Learning from a Modern Multidisciplinary Perspective* (S. 1–51). Greenwich: Information Age Publishing.

Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern.* München: Oldenburg.

Seeger, F. (2006). Ein semiotischer Blick auf die Psychologie des Mathematiklernens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 27* (3/4), 265–284.

Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr.* Dissertation. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Sfard, A. (1998). On Two Metaphors for Learning and the Dangers of Choosing Just One. *Educational Researcher, 27* (2), 4–13

Sfard, A. (2001). There is More to Discourse than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating to Learn More About Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 13–57.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Piftalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 19–228.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C. & Font Strawhun, B. T. (2005). Moving from Rhetoric to Praxis: Issues Faces by Teachers in Having Students Consider Multiple Solutions for Problems in the Mathematics Classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 287–301.

Singer, M. (1994). Discourse Inference Processes. In M. Gernsbacher (Hrsg.), *Handbook of Psycholinguistics* (S. 479–515). San Diego: Academic Press.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Arithmetic Teacher, 26*, 9–15.

Slavit, D. (1997). An Alternate Route to the Reification of Function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 259–281.

Slavit, D. (1999). The Role of Operation Sense in Transitions from Arithmetic to Algebraic Thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 251–274.

Sleeman, D. (1984). An Attempt to Understand Students' Understanding of Basic Algebra. *Cognitive Science, 8*, 387–412.

Smith III, J. P., diSessa, A. A. & Roschelle, J. (1994). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *Journal of the Learning Sciences, 3* (2), 115–163.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern.* Hildesheim: Franzbecker.

Solares, A. & Kieran, C. (2013). Articulating Syntactic and Numeric Perspectives on Equivalence: The Case of Rational Expressions. *Educational Studies in Mathematics*, OnlineFirst: DOI 10.1007/s10649-013-9473-7.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J. & Anderson, D. K. (1988). Cognitive Flexibility Theory: Advanced Knowledge Acquisition in Ill-Structured domains. In V. Patel (Hrsg.), *10th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 375–383). Hillsdale: Erlbaum.

Stahl, R. (2000). *Lösungsverhalten von Schülerinnen und Schülern bei einfachen linearen Gleichungen.* Dissertation. Universität Braunschweig.

Star, J. R., Glasser, H., Lee, K., Beste, G., Mustafa, D. & Kuo-Liang, C. (2005). Investigating the Development of Students' Knowledge of Standard Algorithms in Algebra. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada, April 2005.

Star, J. R. & Newton, J. (2009). The Nature and Development of Experts' Strategy Flexibility for Solving Equations. *ZDM Mathematics Education, 41*, 557–567.

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2007). Flexibility in Problem Solving: The Case of Equation Solving. *Learning and Instruction, 18*, 565–579.

Star, J. R. & Seifert (2006). The Development of Flexibility in Equation Solving. *Contemporary Educational Psychology, 31*, 260–280.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. & Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (2), 112–121.

Steinbring, H. (1998). Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 30* (5), 161–167.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*, 28–49.

Steiner, G. (1991). Lernen und Wissenserwerb. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 137–205). Weinheim: Beltz.

Steiner, G. (2004). *Lernen.* Bern: Hans Huber.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and Relational Thinking: Preservice Elementary Teachers' Awareness of Opportunities and Misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 249–278.

Stephens, A. C. (2008). What „Counts" as Algebra in the Eyes of Preservice Elementary Teachers? *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 33–47.

Striethorst, A. (2002). *Untersuchung individueller Unterschiede in der mentalen Repräsentation von symbolverarbeitenden Regelsystemen und ihr Erklärungswert für die Unterschiedlichkeit von Schülereigenproduktionen im Mathematikunterricht.* Dissertation. Universität Osnabrück.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1* (1), 81–104.

Tall, D. & Thomas, M. O. J. (1991). Encouraging Versatile Thinking in Algebra Using the Computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 125–147.

Tall, D., Thomas, M. O. J., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process. *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), 223–241.

Thomas, M. O. J. (2008). Conceptual representations and versatile mathematical thinking. In M. Niss (Hrsg.), *Proceedings of ICME-10* (CD version of proceedings, S. 1–18), Kopenhagen.

Thomas, M. O. J., Monaghan, J. & Pierce, R. (2004). Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, Assessment, Teaching, and Learning. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Hrsg.), *The Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (S. 155–186). Dordrecht: Kluwer.

Thorndike, E. L. (1913). *Educational Psychology: The Psychology of Learning. Vol. 2.* New York: Teachers College.

Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic.* New York: Macmillan.

Thorndike, E. L., Cobb, M. V., Orleans, J. S., Symonds, P. M., Wald, E. & Woodyard, E. (1926). *The Psychology of Algebra.* New York: Macmillan.

Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*, 844–850.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29–47.

Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik – Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 9* (2/3), 163–204.

Tirosh, D., Even, R. & Robinson, M. (1998). Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 51–64.

Tomasello, M., Carpenter, M., Call, J., Behne, T. & Moll, H. (2005). Understanding and Sharing Intentions: The Origins of Cultural Cognition. *Behavioral and Brain Sciences, 28*, 675–691.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquiere, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and Use of Shortcut Strategies by Traditionally Schooled Children. *Educational Studies in Mathematics, 71* (1), 1–17.

Trigueros, M. & Ursini, S. (2008). Structure Sense and the Use of Variable. In O. Figueras & A. Sepulveda (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter* (Band IV, S. 337–344). Morelia.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In B. Moses (Hrsg.), *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's*

School-Based Journals and Other Publications (S. 7–13). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2011). Analyzing and Developing Strategy Flexibility in Mathematics Education. In J. Elen, E. Stahl, R. Bromme & G. Clarebout (Hrsg.), *Links between Beliefs and Cognitive Flexibility* (S. 175–197). Dordrecht: Springer.

Vlassis, J. (2002). The Balance Model: Hindrance or Support for the Solving of Linear Equations with One Unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 341–359.

Voigt, J. (1984). *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht.* Weinheim: Beltz.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagner, A. C., Uttendorfer-Marek, I. & Weidle, R. (1977). Die Analyse von Unterrichtsstrategien mit der Methode des „Nachträglichen Lauten Denkens“ von Lehrern und Schülern zu ihrem unterrichtlichem Handeln. *Unterrichtswissenschaft, 5*, 244–250.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Generalising the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Actions that Support 8 Years Olds’ Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171–185.

Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden.* Bern: h.e.p.

Weber, C. (2010). *Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Weidle, R. & Wagner, A. C. (1982). Die Methode des lauten Denkens. In G. L. Huber & H. Mandl (Hrsg.), *Verbale Daten* (S. 81–103). Weinheim: Beltz.

Wenger, R. H. (1987). Cognitive Science and Algebra Learning. In A. H. Schoenfeld, *Cognitive Science and Mathematics Education* (S. 217–251). Hillsdale: Erlbaum.

Wertheimer, M. (1964). *Produktives Denken.* Frankfurt: Waldemar Kramer.

Wilson, J. & Clark, D. (2004). Towards the Modelling of Mathematical Metacognition. *Mathematics Education Research Journal, 16* (2), 25–48.

Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *mathematica didactica, 5*, 185–211.

Wittgenstein, L. (1974). *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1984). *Philosophische Untersuchungen.* Frankfurt: Suhrkamp.

Wittmann, G. (2003). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen*. Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, G. (2013). Die Zahlen sind entscheidend. Zur Konsistenz von Lösungswegen in der Bruchrechnung. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen* (S. 227–238). Wiesbaden: Springer.

Wittmann, M. C., Flood, V. J. & Black, K. E. (2013). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 169–181.

Witzel, A. (1982). *Verfahren der qualitativen Sozialforschung. Überblick und Alternativen*. Frankfurt: Campus.

Wollring, B. (2006). Kindermuster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung. In M. Grüssing & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule* (S. 80–102). Offenburg: Mildenberger.