

MUSTER

**Ergänzungsprüfung für die Zulassung zu den Studiengängen
Vorschul-/Primarstufe bzw. Primarschulstufe**
(gemäss [Richtlinien der PH](#) vom 17. Januar 2013):

Musterarbeit

Fach: Mathematik (schriftlich: 180 Minuten)

*Die vorliegende Musterprüfung im Fach **Mathematik** überprüft Kompetenzen und Fähigkeiten gemäss den [EDK Richtlinien](#) für die Umsetzung der Fachmaturität im Berufsfeld Pädagogik (Stand: 11.05.2012) sowie dem [EDK Rahmenlehrplan](#) für Fachmittelschulen (Stand: 25.10.2018). Die Inhalte und Themen entsprechen im Wesentlichen den jeweils geltenden Lehrplänen der Fachmittelschulen des Bildungsraums Nordwestschweiz.*

Ergänzungsprüfung für die Zulassung zu den Studiengängen Vorschul-/Primarstufe bzw. Primarschulstufe (gemäss Richtlinien der PH vom 17. Januar 2013):

Die vorliegende Musterprüfung im Fach Mathematik überprüft Kompetenzen und Fähigkeiten gemäss den EDK Richtlinien für die Umsetzung der Fachmaturität im Berufsfeld Pädagogik (Stand: 11.05.2012) sowie dem EDK Rahmenlehrplan für Fachmittelschulen (Stand: 25.10.2018). Die Inhalte und Themen entsprechen im Wesentlichen den jeweils geltenden Lehrplänen der Fachmittelschulen des Bildungsraums Nordwestschweiz.

Erlaubte Hilfsmittel: Gemäss dem Formular *Erlaubte Hilfsmittel*.

Bemerkungen:

- Alle Berechnungen müssen in nachvollziehbaren Einzelschritten aufgeführt werden.
- Argumentationen müssen in einer verständlichen, nachvollziehbaren Sprache unter Verwendung mathematischer Fachbegriffe geführt werden.
- Ungültiges muss gestrichen werden.
- Soweit nicht anders vermerkt, dürfen alle Funktionen des erlaubten Taschenrechners verwendet werden.

Prüfungsteile: Es gibt zwei Prüfungsteile:

- **Teil 1.** Diese sechs Aufgaben geben je drei Punkte.
- **Teil 2.** Diese fünf Aufgaben sind etwas umfangreicher. Jede Aufgabe ergibt vier Punkte.
- Insgesamt sind $18 + 20 = 38$ Punkte möglich. Zum Erreichen der Note 6 sind nicht alle Punkte erforderlich.

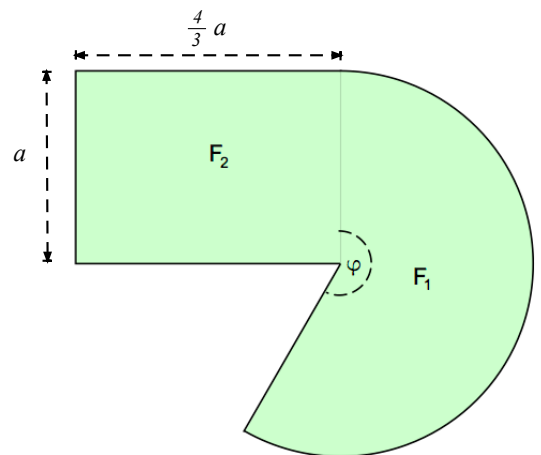
Zeit: 180 Minuten.

Autor: Adrian Lüthy

Teil 1

1. Geometrie – gleiche Flächeninhalte

In der untenstehenden Abbildung hat das Rechteck die Seitenlängen a und $\frac{4}{3}a$. Die beiden Flächen F_1 und F_2 sind gleich gross.



- (a) Wie gross sind die Inhalte von F_1 und F_2
- (b) Bestimme den Winkel φ .

$$a) F_1 = F_2 = a \cdot \frac{4}{3} a = \frac{4}{3} a^2$$

$$b) \frac{4}{3} a^2 = \frac{a^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot \varphi$$

$$\varphi = \frac{4 \cdot 360^\circ}{2 \cdot \pi} \Rightarrow \varphi = 152.79^\circ$$

2. Kombinatorik – Bücher

total 19 Bücher

Hans besitzt 7 Mathematikbücher, 8 Physikbücher und 4 Chemiebücher, alle sind verschieden.

- (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in ein Regal zu stellen (ohne jede Einschränkungen)? Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in ein Regal zu stellen, wenn zuerst alle Mathematikbücher aufgestellt werden sollen?
- (b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in ein Regal zu stellen, wenn sie thematisch beieinander stehen sollen?
- (c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus allen Büchern 4 auszuwählen?
- (d) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus allen Büchern 5 auszuwählen, wenn es genau 2 Mathematik und 3 Physikbücher sein sollen?

$$a) 19! \sim 1,22 \cdot 10^{17}$$

$$7! \cdot 12! \sim 2,41 \cdot 10^{12}$$

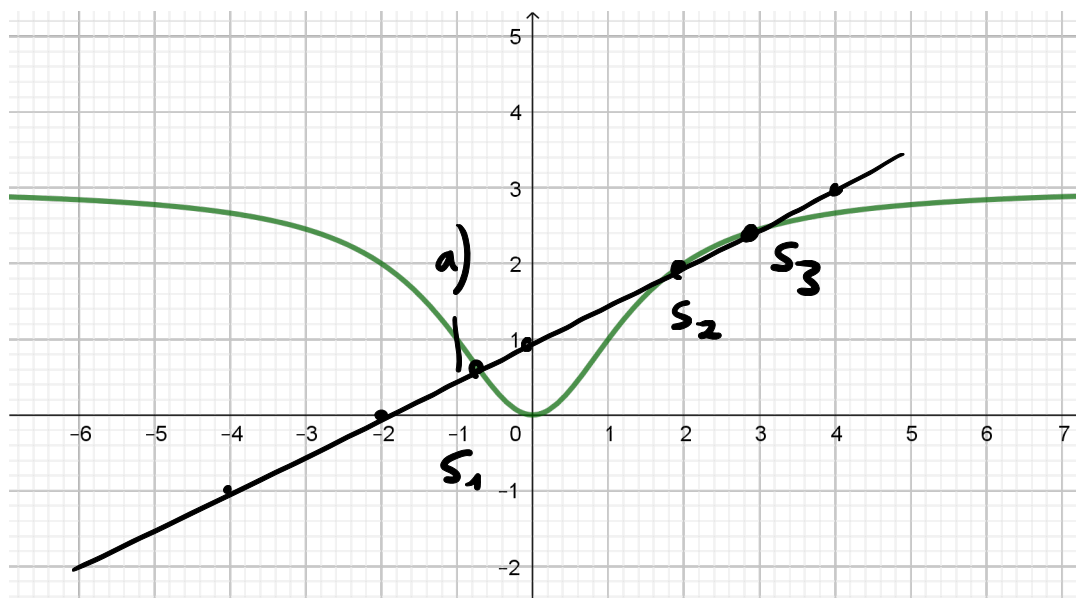
$$b) 3! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 4! \sim 2,93 \cdot 10^{10}$$

$$c) \binom{19}{4} = 3876$$

$$d) \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3} = 21 \cdot 56 = 1176$$

3. Funktionen

Beantworte folgende Fragen durch Ablesen am untenstehenden Graphen.

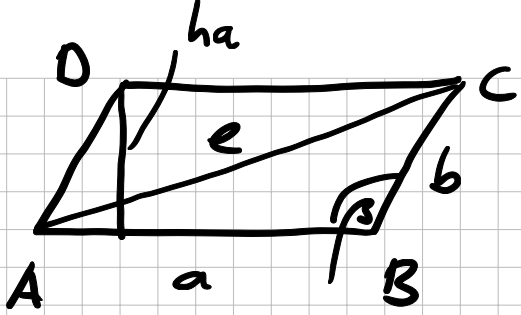


- (a) Was ist der Wert der Funktion an der Stelle -1 ? **1**
- (b) Wo hat die Funktion im gezeichneten Bereich den Wert 4? **existiert nicht!**
- (c) Schätze ab und begründe das Resultat: Den Wert bei $x = 1000$.
- (d) Gib den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion an. Begründe die Resultate.
- (e) Skizziere in das vorliegende Koordinatensystem die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$ und lies alle Schnittpunkte ab.

- c) **≈ 3 , da sich der Graph immer mehr $y = 3$ nähert**
- d) **$D = \mathbb{R}$ (y existiert im gezeichneten Bereich $W = [0; 3[$ es gibt keine grösseren/kleinere Werte**
- e) **$S_1(-0.6/0.5)$ $S_2(2/2)$ $S_3(2.9/2.4)$**

4. Parallelogramm

Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Seiten $a = 8 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ und der Diagonalen $e = 11 \text{ cm}$. Berechne die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Parallelogramms.



The diagram shows a parallelogram with vertices A, B, C, and D. Side AB is labeled 'a', side BC is labeled 'b', and the diagonal AC is labeled 'e'. A height line 'ha' is drawn from vertex D perpendicular to side AB. The angle at vertex B is labeled 'beta'.

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$

$$\cos \beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \beta = 113.58^\circ = \delta$$

$$\alpha = \gamma = 180^\circ - 113.58^\circ = 66.42^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \sin \alpha = 4.58 \text{ cm}$$

$$F = a \cdot h_a = 36.66 \text{ cm}^2$$

5. Gleichungssystem

Löse das Gleichungssystem

$$(1) \quad (x-2)^2 - (2y-3)^2 = (x+2)^2 - (2y+1)^2$$

$$(2) \quad \frac{2x-y}{15} - \frac{x+3y}{10} = 3 \quad | \cdot 30$$

$$(1) \quad x^2 - 4x + 4 - (4y^2 - 12y + 9) = x^2 + 4x + 4 - (4y^2 + 4y + 1)$$

$$\cancel{x^2} - 4x - 5 - 4y^2 + 12y = \cancel{x^2} + 4x + 3 - 4y^2 - 4y$$

$$-8x + 16y = 8 \quad \Rightarrow \quad -x + 2y = 1$$

$$(2) \quad 2(2x-y) - 3(x+3y) = 90$$

$$4x - 2y - 3x - 9y = 90$$

$$\Rightarrow \quad x - 11y = 90$$

$$-x + 2y = 1$$

$$x - 11y = 90$$

$$x = 90 + 11y = -\frac{191}{9}$$

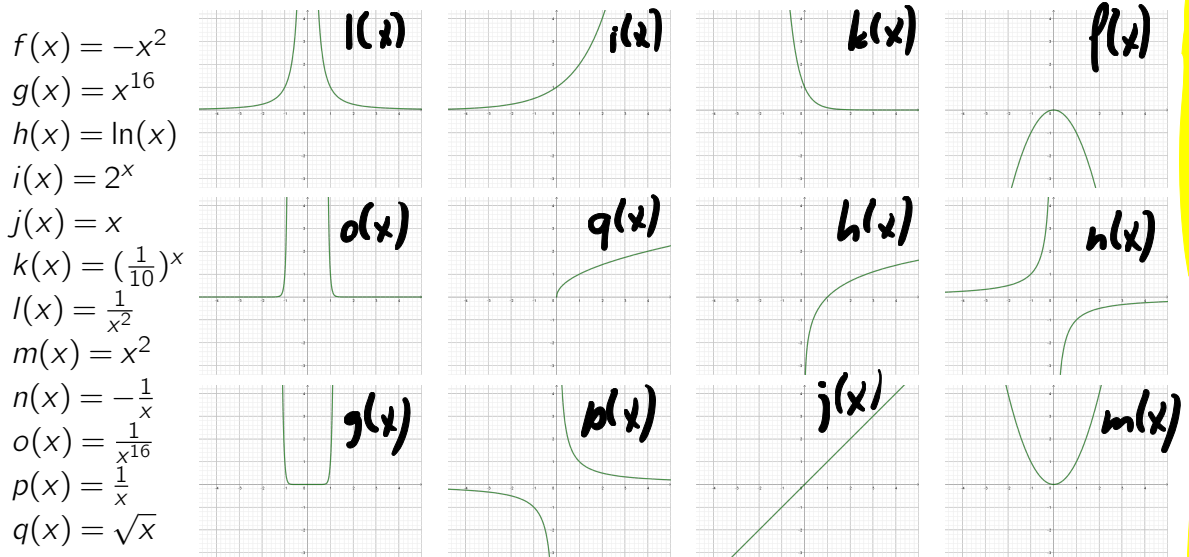
$$-9y = 91$$

$$y = -\frac{91}{9}$$

$$L = \left\{ -\frac{191}{9}; -\frac{91}{9} \right\}$$

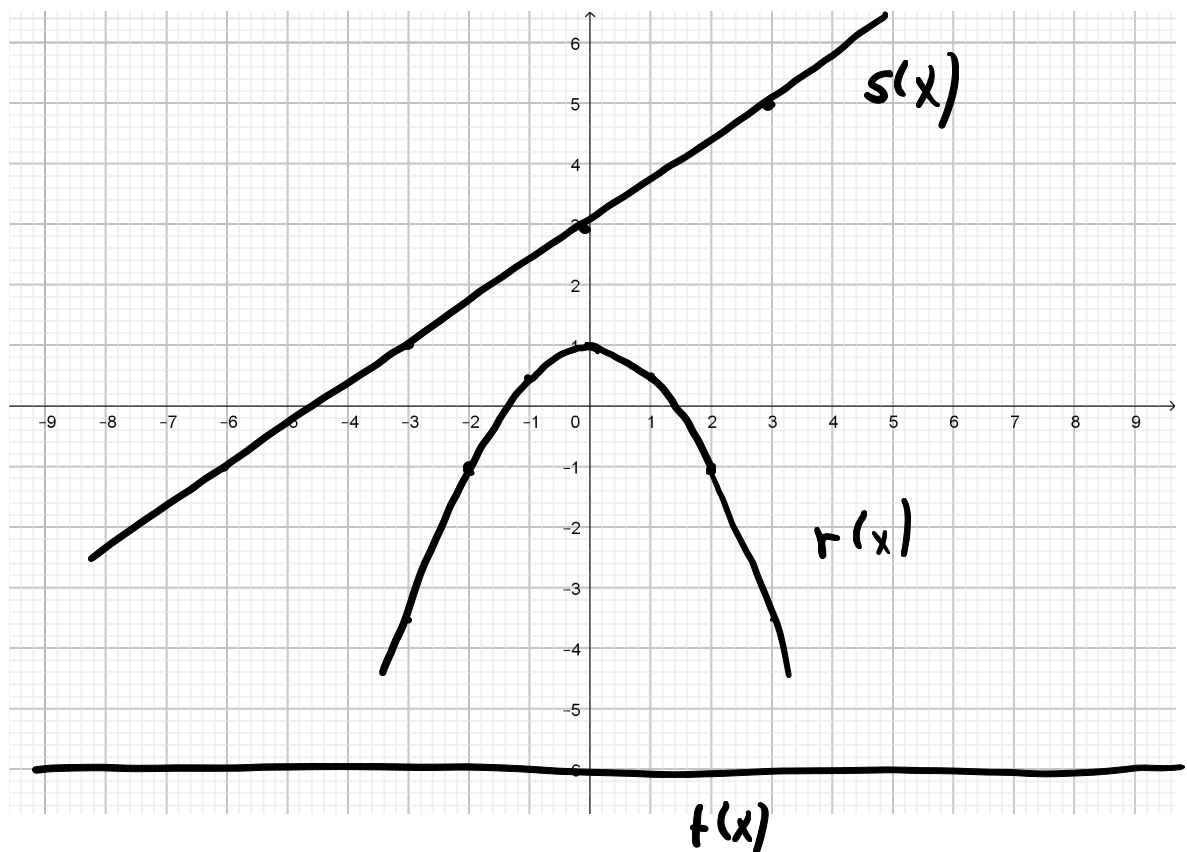
6. Graphen von Funktionen

(a) Ordne jeder Funktionsgleichung den korrekten Graphen zu



(b) Skizziere ins untenstehende Koordinatensystem

$$r(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 \quad s(x) = \frac{2}{3}x + 3 \quad t(x) = -6$$



Teil 2

7. Quadratische Funktion und Gerade

Gegeben ist die quadratische Funktion $q(x) = -x^2 + 6x - 7$.

- Bestimme die Koordinaten des Scheitels durch eine Rechnung von Hand.
- Bestimme die Nullstellen durch eine Rechnung von Hand.
- Beweise durch eine Rechnung, dass $q(x)$ keinen Schnittpunkt mit der Geraden $g(x) = 2x + 5$ hat.
- Bestimme mit einer Rechnung den Wert b , so dass $q(x)$ die Gerade mit der Gleichung $h(x) = 2x + b$ genau berührt.

$$a) q(x) = -(x-3)^2 + 2 \rightarrow 5(3/2)$$

$$b) \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{-2} = -\frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{8}}{-2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$c) -x^2 + 6x - 7 = 2x + 5$$

$$-x^2 + 4x - 12 = 0 \quad D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 12 < 0$$

\rightarrow keine Lösung

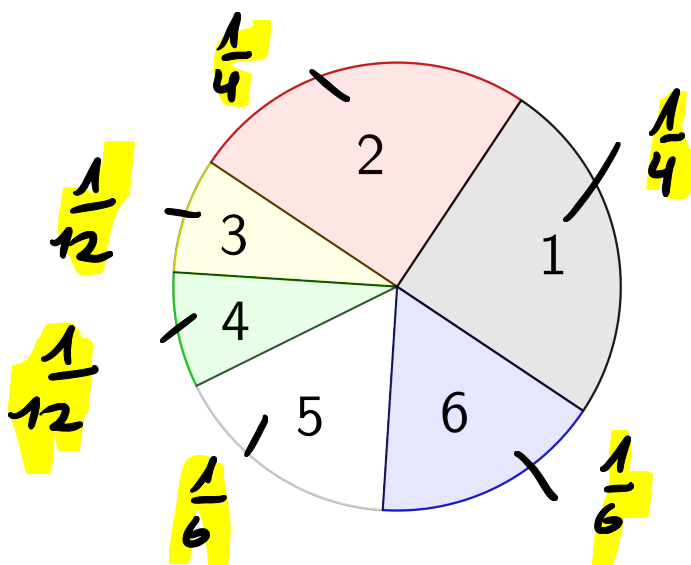
$$d) -x^2 + 6x - 7 = 2x + b$$

$$-x^2 + 4x - 7 - b = 0 \quad D = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7 - b)$$

$$D = 0 \Rightarrow 16 - 28 - 4b = 0 \Rightarrow b = -3$$

8. Wahrscheinlichkeit – Glücksrad

Ein Glücksrad hat 6 Felder: Feld 1 und 2 mit einer Winkelgrösse von je 90° , Feld 3 und 4 mit einer Winkelgrösse von je 30° , Feld 5 und 6 mit einer Winkelgrösse von je 60° .



- (a) Beschrifte in der Skizze die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Sektoren.
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...
- ... in 3 Drehungen rot blau gelb in dieser Reihenfolge gedreht werden?
 - ... in 3 Drehungen rot blau gelb in irgend einer Reihenfolge gedreht werden?
 - ... jemand in 6 Drehungen das Ereignis 'weiss' genau 4 Mal erhält?

$$b) \text{ i) } P(RGB) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{288} \rightarrow \sim 0.35\%$$

$$\text{ii) } \frac{1}{288} \cdot 3! = \frac{1}{48} \rightarrow \sim 2.08\%$$

$$\text{iii) } \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \rightarrow \sim 0.80\%$$

- (c) Das Rad wurde dreimal hintereinander gedreht und hielt jedes Mal auf der gleichen Farbe. Welche Farbe war es, wenn die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis $\frac{1}{216}$ beträgt?

$$x^3 = \frac{1}{216}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \frac{1}{6}$$

→ Weiss oder blau

- (d) Das Rad wird 5 Mal gedreht. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.00140625 zeigt sich die Sequenz rot - grün - rot - grün - rot. Es ist nicht möglich, dass dieses Resultat von obigem Glücksrad stammt. Wie gross müsste der Winkel von grün sein, damit das Resultat korrekt ist? Hinweis: Der Sektor der Farbe Rot bleibt 90° .

$$P(\text{rot}) = \frac{1}{4} \quad P(\text{grün}) = x$$

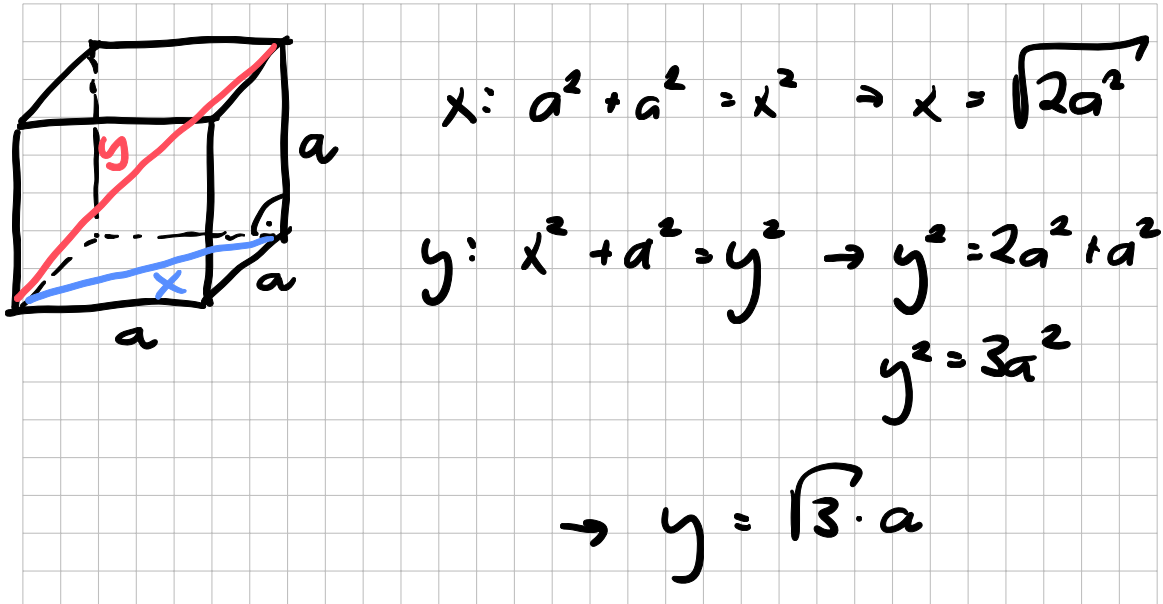
$$\frac{1}{4} \cdot x \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} x^2 = 0.00140625$$

$$x^2 = 0.09 \quad x = \pm 0.3$$

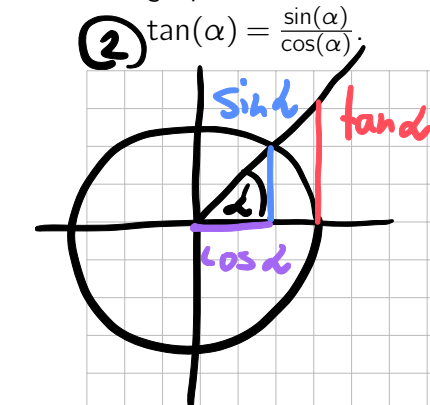
$$\rightarrow \text{Winkel } \frac{3}{10} \cdot 360^\circ = 108^\circ$$

9. Erkläre und begründe

- (a) In der Formelsammlung findet sich die Formel für die Diagonale im Würfel. Begründe diese Formel durch Anwenden des Satzes von Pythagoras.



- (b) In der Formelsammlung findet man, dass die Funktion $\tan(\alpha)$ nicht definiert ist für $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$. Begründe dies auf zwei verschiedene Arten, einmal graphisch am Einheitskreis ^① und einmal durch eine Überlegung mit der Formel $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.



- ① Für $\alpha = 90^\circ$ ist die 'Tangenslinie' parallel zur y-Achse \rightarrow sie schneiden sich nicht \rightarrow kein Wert für 90°

② $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

- Für $\alpha = 90^\circ$ gilt $\cos \alpha = 0$
 \rightarrow Division durch 0 ist nicht definiert

(c) In der Formelsammlung findet man die Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Erkläre die Bedeutung von \sum , \bar{x} , $(x_i - \bar{x})$ und s^2 . Beschreibe jeweils auch, was da genau berechnet wird.

\bar{x} ist der Mittelwert der Daten

$x_i - \bar{x}$ die Abweichung eines Datums vom Mittelwert

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ die Summe der quadrierten Abweichungen

s^2 die Varianz der Daten

(d) Im allgemeinen Dreieck gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Erkläre was passiert, wenn man den Satz in einem rechtwinkligen Dreieck anwendet.

Da $\gamma = 90^\circ$ und $\cos(90^\circ) = 0$

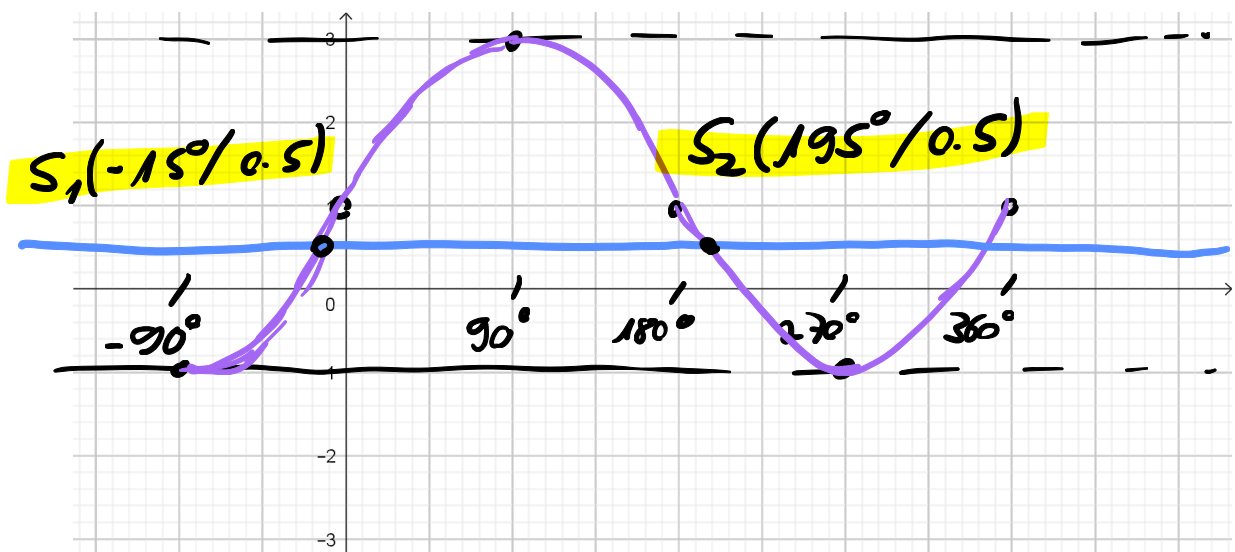
wird aus dem cos-Satz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

also der Pythagoras

10. Gleichungen graphisch und rechnerisch

- (a) Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2\sin(x) + 1$ und $g_1(x) = 0.5$. Skizziere beide Funktionen ins untenstehende Koordinatensystem, beschrifte die x -Achse und lies die Koordinaten von 2 Schnittpunkten ab. Bestimme rechnerisch alle Lösungen der Gleichung $2\sin(x) + 1 = 0.5$.

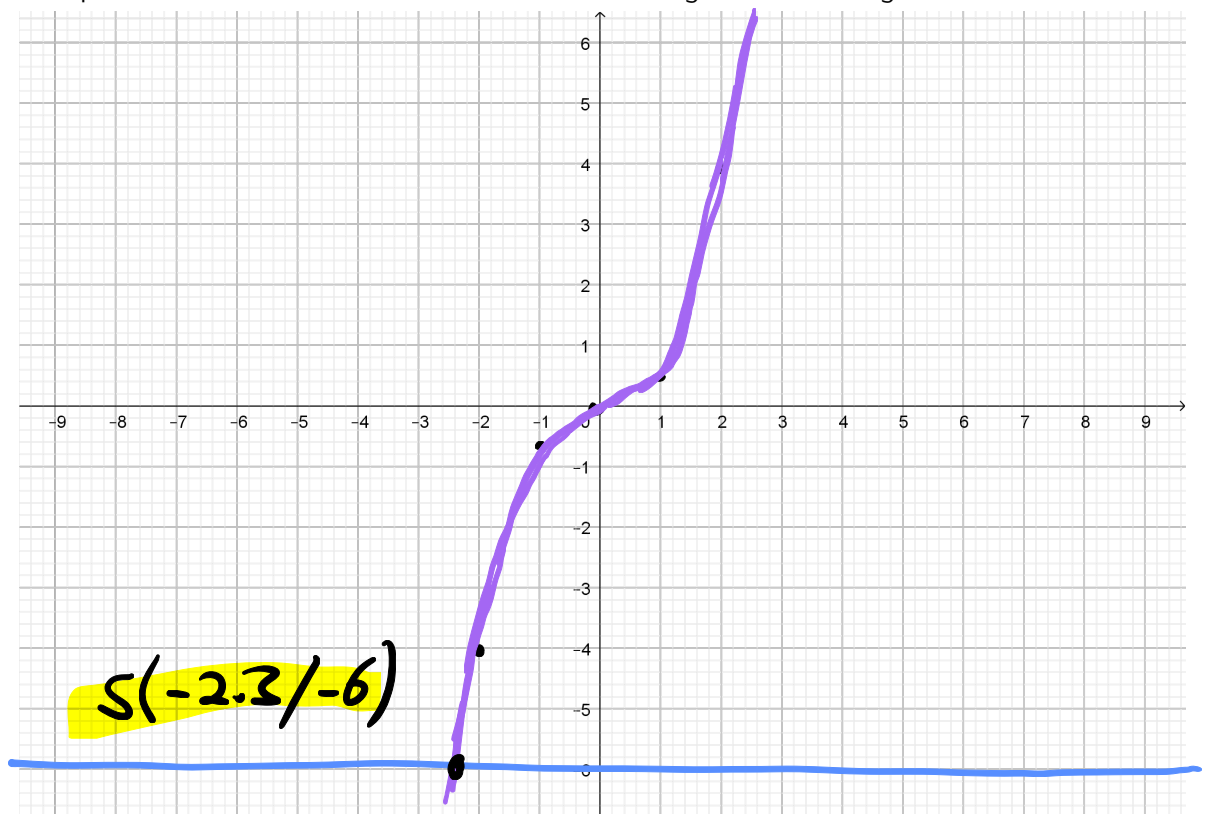


$$2 \sin x + 1 = 0.5 \Rightarrow \sin x = -0.25$$

$$x_1 = -14.5^\circ + h \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = 194.5^\circ + h \cdot 360^\circ$$

- (b) Gegeben ist die Funktion $f_2(x) = 0.5x^3$ und $g_2(x) = -6$. Skizziere beide Funktionen ins untenstehende Koordinatensystem und lies die Koordinaten des Schnittpunktes ab. Bestimme rechnerisch die Lösung der Gleichung $0.5x^3 = -6$.



$$0.5x^3 = -6 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -12$$

$$x = -\sqrt[3]{12}$$

$$x \approx -2.29$$

11. Wachstum – Zeitung

Eine neue Monatszeitung startete anfangs Januar 2009 mit einer Auflage von 50'000 Exemplaren. Seither konnte die Zeitung jeden Monat ihre Auflage um 3% gegenüber dem Vormonat steigern.

- Wie hoch war die Auflage anfangs Oktober 2009?
- Wie gross ist die prozentuale Zunahme pro Jahr?
- Bei der wievielten Auflage wurden zum ersten Mal mehr als 200'000 Exemplare verkauft?
- Eine andere Zeitung konnte ihre Auflage auch jeden Monat um einen fixen Prozentsatz gegenüber dem Vormonat vergrössern. Sie startete mit einer Auflage von 100'000 Exemplaren und hatte 1 Jahr später bereits eine Auflage von 130'600 Exemplaren. Wie gross war der prozentuale Zuwachs von Monat zu Monat?

$$a) 50'000 \cdot 1.03^9 \approx 65'239$$

$$b) 1.03^{12} = 1.4257 \rightarrow 42.6\%$$

$$c) 50'000 \cdot 1.03^x = 200'000$$

$$1.03^x = 4 \rightarrow x = \log_{1.03} 4 \approx 46.89$$

\rightarrow nach 47 Monaten $\rightarrow 48.$ Auflage

$$d) 100'000 \cdot x^{12} = 130'600$$

$$\rightarrow x = \sqrt[12]{\frac{130'600}{100'000}} \approx 1.0225$$

$\rightarrow 2.25\%$